考号________ 姓名________ 班级________ 学校________

密封线内不要答题

2023 届高三统一考试试题

数　学

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|\frac{3-x}{x}\geqslant 2\}$,则 $\complement_{R}A=$

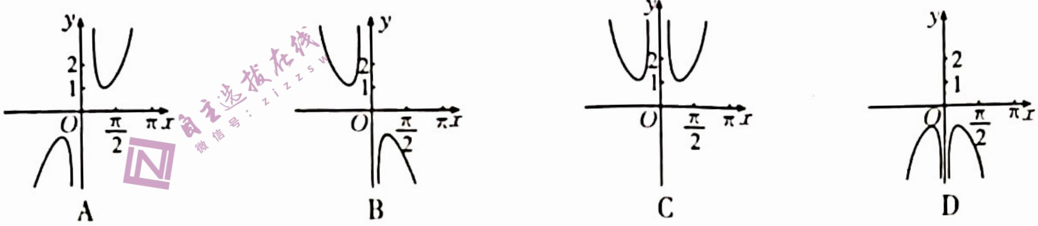
A. $\{x|x>1\}$　　B. $\{x|x\leqslant 0$ 或 $x>1\}$

C. $\{x|0<x<1\}$　　D. $\{x|x<0$ 或 $x>1\}$

2. 在复平面内,复数 z_1,z_2 对应的点分别是 $(2,-1),(0,5)$,则复数 $\frac{z_2}{z_1}$ 的虚部为

A. 2　　B. -2　　C. $-2\mathrm{i}$　　D. $2\mathrm{i}$

3. 函数 $f(x)=\frac{2+\cos 2x}{\sin x}$ 的部分图象大致为



4. 过点(1,2)作直线,使它与抛物线 $y^2=4x$ 仅有一个公共点,这样的直线有

A. 1 条　　B. 2 条　　C. 3 条　　D. 4 条

5. 已知 A,B,C 为球 O 球面上的三个点,若 $AB=BC=AC=3$,球 O 的表面积为 36π,则三棱锥 $O-ABC$ 的体积为

A. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$　　B. $\frac{27\sqrt{3}}{4}$　　C. $\frac{9\sqrt{2}}{4}$　　D. $\frac{27\sqrt{2}}{4}$

6. "碳达峰"是指二氧化碳的排放不再增长,达到峰值之后开始下降,而"碳中和"是指企业、团体或个人通过植树造林、节能减排等形式,抵消自身产生的二氧化碳排放量,实现二氧化碳"零排放". 某地区二氧化碳的排放量达到峰值 a(亿吨)后开始下降,其二氧化碳的排放量 S(亿吨)与时间 t(年)满足函数关系式 $S=ab^t$,若经过 4 年,该地区二氧化碳的排放量为 $\frac{3a}{4}$(亿吨). 已知该地区通过植树造林、节能减排等形式抵消自身产生的二氧化碳排放量为 $\frac{a}{3}$(亿

吨)，则该地区要实现"碳中和"，至少需要经过(参考数据：lg 2≈0.30，lg 3≈0.48)

A. 13 年　　B. 14 年　　C. 15 年　　D. 16 年

7. 2022 年男足世界杯于 2022 年 11 月 21 日至 2022 年 12 月 17 日在卡塔尔举行. 现要安排甲、乙等 5 名志愿者去 A,B,C 三个足球场服务，要求每个足球场都有人去，每人都只能去一个足球场，则甲、乙两人被分在同一个足球场的安排方法种数为

A. 12　　B. 18　　C. 36　　D. 48

8. 已知 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$，$\cos 2\alpha+\cos 2\beta+1=2\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)$，则

A. $\alpha+\beta=\frac{\pi}{6}$　　B. $\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$　　C. $\beta-\alpha=\frac{\pi}{6}$　　D. $\beta-\alpha=\frac{\pi}{3}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 将 $y=2\sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到 $f(x)$ 的图象，则

A. $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$　　B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{12}$ 对称

C. $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{6},0)$ 对称　　D. $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内是增函数

10. 为了解某班学生每周课外活动的时间，甲同学调查了 10 名男生，其平均数为 9，方差为 11；乙同学调查了 10 名女生，其平均数为 7，方差为 8. 若将甲、乙两名同学调查的学生合在一起组成一个容量为 20 的样本，则该样本数据的

A. 平均数为 8.5　　B. 平均数为 8　　C. 方差为 10.5　　D. 方差为 10

11. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$，$\forall m,n\in(0,+\infty)$，$f(mn)=f(m)+f(n)$，且当 $x>1$ 时，$f(x)<0$，则

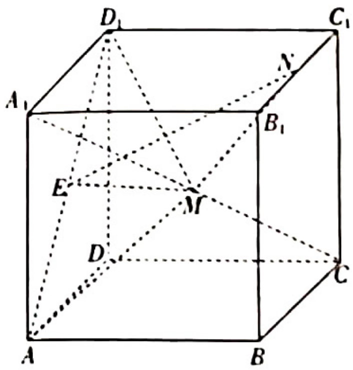
A. $f(1)=0$

B. $f(x-2)$ 有三个零点

C. $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为减函数

D. 不等式 $xf(x-2)<0$ 的解集是 $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$

12. 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是线段 AD_1 的中点，点 M,N 满足 $\overrightarrow{A_1M}=\lambda\overrightarrow{A_1C}$，$\overrightarrow{B_1N}=\mu\overrightarrow{B_1C_1}$，其中 $\lambda,\mu\in(0,1)$，则



A. 存在 $\lambda\in(0,1)$，使得平面 $AD_1M\perp$ 平面 AB_1C

B. 存在 $\lambda,\mu\in(0,1)$，使得平面 $MEN\parallel$ 平面 AB_1C

C. 对任意 $\lambda,\mu\in(0,1)$，MN 的最小值为 $\sqrt{2}$

D. 当 $\lambda=\frac{1}{2}$，$\mu=\frac{2}{3}$ 时，过 E,M,N 三点的平面截正方体得到的截面多边形的面积为 $\frac{4\sqrt{10}}{3}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(m,-2)$，$\boldsymbol{b}=(1,3)$，若 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，则 $m=$ ____▲____.

14. 已知集合 $P=(0,1)\cup(1,2)$，函数 $f(x)$ 满足不等式 $f(x)\cdot\ln x>0$ 的解集为 P，则函数 $f(x)=$ ____▲____.（写出一个符合条件的即可）

15. 双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右顶点分别为 A,B,P 为 C 上一点，若点 P 的纵坐标为 1，$|PA|=\sqrt{13}$，$|PB|=2$，则 C 的离心率为____▲____.

16. 已知 x_0 是函数 $f(x)=2a\sqrt{x}+b-e^{\frac{x}{2}}$ 的一个零点，且 $x_0\in[\frac{1}{4},e]$，则 a^2+b^2 的最小值为____▲____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

在数列 $\{a_n\}$ 中，$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\frac{a_3}{4}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=n^2+n$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 证明：$\frac{1}{3a_1}+\frac{1}{4a_2}+\cdots+\frac{1}{(n+2)a_n}<\frac{1}{8}$.

18.（12 分）

某电视台举行冲关直播活动，该活动共有四关，只有一等奖和二等奖两个奖项，参加活动的选手从第一关开始依次通关，只有通过本关才能冲下一关. 已知第一关的通过率为 0.7，第二关、第三关的通过率均为 0.5，第四关的通过率为 0.2，四关全部通过可以获得一等奖（奖金为 500 元），通过前三关就可以获得二等奖（奖金为 200 元），如果获得二等奖又获得一等奖，奖金可以累加. 假设选手是否通过每一关相互独立，现有甲、乙两位选手参加本次活动.

(1) 求甲获得奖金的期望；

(2) 已知甲和乙最后所得奖金之和为 900 元，求甲获得一等奖的概率.

19.（12 分）

在△ABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，$c=1$，$b\cos C-\cos B=1$.

(1) 证明：$B=2C$.

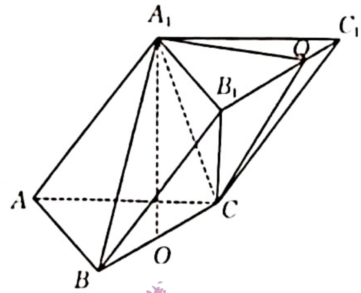
(2) 若△ABC 为锐角三角形，求 a 的取值范围.

20.（12 分）

在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$A_1B=A_1C=AA_1=2$，$AB\perp AC$，O 为 BC 的中点.

（1）证明：$A_1O\perp$ 平面 ABC.

（2）已知 $AB=AC=2$，在线段 B_1C_1 上（不含端点）是否存在点 Q，使得二面角 $Q-A_1C-B_1$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$？若存在，确定点 Q 的位置；若不存在，请说明理由.



21.（12 分）

已知 $ab\neq 0$，曲线 $f(x)=\frac{3x}{a-x^2}$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $6x+by-3=0$.

（1）求 a,b 的值；

（2）证明：当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)<\tan x$.

22.（12 分）

已知 O 为坐标原点，M 是椭圆 C_1：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上的一个动点，点 N 满足 $\overrightarrow{ON}=\sqrt{3}\,\overrightarrow{OM}$，设点 N 的轨迹为曲线 C_2.

（1）求曲线 C_2 的方程.

（2）若点 A,B,C,D 在椭圆 C_1 上，且 $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}$，$AC$ 与 BD 交于点 P，点 P 在 C_2 上. 证明：$\triangle PCD$ 的面积为定值.