

2021~2022 学年度第二学期第二学段模块检测

高二数学试题

2022.07

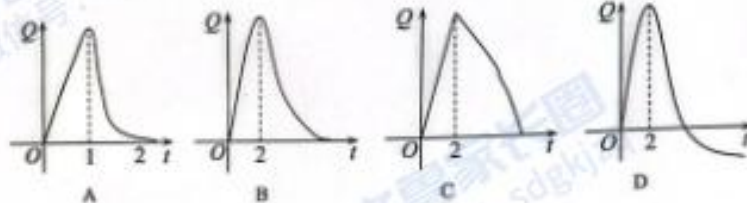
本试卷共 6 页, 22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上, 并将条形码粘贴在答题卡指定位置上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 请将答题卡上交。

一、单项选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid y = \lg(x-1)\}$, $B = \{x \mid 2^x \leq 8\}$, 则 $A \cap B =$
A. $(1, 3)$ B. $(1, 3]$ C. $(-\infty, 3]$ D. $[1, 3]$
2. 已知随机变量 X 服从正态分布 $N(2, 2^2)$, 则 $P(X > 0) =$
A. 0.84135 B. 0.97725 C. 0.99865 D. 0.15865
附: $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0.6827$, $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$,
 $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973$.
3. 在 2h 内将某种药物注射进患者的血液中。在注射期间, 血液中的药物含量呈线性增加; 停止注射后, 血液中的药物含量呈指数衰减。能反映血液中药物含量 Q 随时间 t 变化的图象是



4. 函数 $y = 3^{-x}$ 与函数 $y = -3^x$ 的图象
A. 关于 x 轴对称 B. 关于 y 轴对称
C. 关于原点对称 D. 关于直线 $y = x$ 对称

5. 已知 $a > 0, a \neq 1, \log_a \frac{1}{3} < 1, (\frac{1}{3})^a < 1, a^{\frac{1}{3}} < 1$, 则实数 a 的取值范围是
- A. $(1, +\infty)$ B. $(0, 1)$ C. $(\frac{1}{3}, 1)$ D. $(0, \frac{1}{3})$
6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x > 0 \\ kx, & x \leq 0 \end{cases}$, 曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} + \ln 2$ 有且仅有一个交点, 则实数 k 的取值范围为
- A. $[\frac{1}{2}, +\infty)$ B. $(\frac{1}{2}, +\infty)$ C. $(1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$
7. 已知 $(1+x)^n + (1-2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, 且 $\sum_{i=1}^n a_i = 29$, 则 $n =$
- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7
8. 已知 $a = \ln \frac{\pi}{3}, b = 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} - 2, c = \sin 0.04 - \frac{1}{2}(\sqrt{\frac{\pi}{3}} - 1)$, 则 a, b, c 的大小关系是
- A. $c > b > a$ B. $a > b > c$ C. $b > a > c$ D. $a > c > b$

二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 选对但不全的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知某足球运动员每次定点射门的命中率为 0.5, 则下述正确的是
- A. 若共进行 10 次射门, 则命中次数的数学期望等于 5
- B. 若共进行 10 次射门, 则命中 5 次的概率最大
- C. 若共进行 5 次射门, 则命中次数的方差等于 1
- D. 若共进行 5 次射门, 则至少有两次命中的概率为 $\frac{1}{3}$
10. 非空集合 W 关于运算 $\otimes$ 满足: 对于任意的 $a, b \in W$, 都有 $a \otimes b \in W$, 则称集合 W 关于运算 $\otimes$ 为“回归集”。下列集合 W 关于运算 $\otimes$ 为“回归集”的是
- A. W 为 $\mathbb{N}$, $\otimes$ 为自然数的减法
- B. W 为 $\mathbb{Q}$, $\otimes$ 为有理数的乘法
- C. W 为 $\mathbb{R}$, $\otimes$ 为实数的加法
- D. 已知全集 $U = \mathbb{R}$, 集合 $A = \mathbb{Q}$, W 为 $\complement_{\mathbb{R}}(A)$, $\otimes$ 为实数的乘法

11. 关于以正方体的顶点为顶点的几何体, 下述正确的是

- A. 若几何体为正四面体, 则只有1个
- B. 若几何体为三棱柱, 则共有12个
- C. 若几何体为四棱锥, 则共有48个
- D. 若几何体为三棱锥, 则共有58个

12. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的不恒为零的函数, 对于任意 $a, b \in \mathbb{R}$ 都满足

$$f(ab) = af(b) + bf(a),$$

- A. $f(0) = 0$
- B. $f(1) = 1$
- C. $f(x)$ 是奇函数
- D. 若 $f(2) = 2$, 则 $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

三、填空题: 本大题共4小题, 每小题5分, 共20分.

13. $(x^2 - \frac{2}{x})^6$ 的展开式中的常数项是_____。(用数字作答)

14. $(\log_3 3 - \log_3 3)(\log_3 2 + \log_3 2) =$ _____。(用数字作答)

15. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 满足 $f(x+1) = 2f(x)$, 且当 $x \in (0, 1]$ 时,

$f(x) = x(1-x)$, 若对任意 $x \in (-\infty, m]$, 都有 $f(x) \leq \frac{3}{8}$, 则 m 的取值范围是_____.

16. 某同学在参加某游戏活动中遇到一道单选题且完全不会做, 他随机蒙了 A, B, C, D 选项中的 A 选项, 主持人告诉他 B 和 C 选项不对, 此时, 若他仍坚持选 A , 则其选对的

概率为_____; 若他改选 D 选项, 则其选对的概率为_____.

(第一空2分, 第二空3分)

四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 10 分)

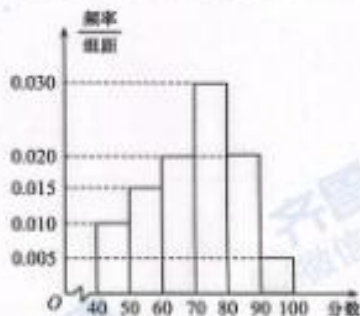
某制造商制造并出售球形瓶装的某种饮料, 瓶子的制造成本是 $0.8\pi r^2$ 分, 其中 r (单位: cm) 是瓶子的半径. 已知每出售 1mL 的饮料, 制造商可获利 0.2 分, 且制造商能制作的瓶子的最大半径为 6cm.

- (1) 瓶子的半径多大时, 能使每瓶饮料的利润最大?
- (2) 瓶子的半径多大时, 每瓶饮料的利润最小?
- (3) 假设每瓶饮料的利润不为负值, 求瓶子的半径的取值范围.

18. (本题满分 12 分)

某市某次数学文化测试 (满分为 100 分), 现随机抽取 1000 名学生的成绩进行分析, 其频率分布直方图如图所示.

- (1) 以样本估计总体, 估计本次测试平均分 (结果四舍五入保留整数);
- (2) 本次考试分数的前 20% 为优秀等级, 请估计优秀等级的最低分数 (精确到 0.1);
- (3) 若用比例分配的分层抽样方法在分数段为 $[60, 80)$ 的学生中抽取 5 人, 再从这 5 人中任取 2 人, 求这 2 人中至多有 1 人在分数段 $[60, 70)$ 内的概率.



高二数学试题 第 4 页 (共 6 页)

19. (本题满分 12 分)

某食品厂为了检查甲、乙两条自动包装流水线的生产情况,随机在这两条流水线上各抽取 100 件产品作为样本称出它们的质量 (单位: 毫克), 质量值落在 $(175, 225]$ 的产品为合格品, 否则为不合格品. 统计数据如下面 2×2 列联表:

	甲流水线	乙流水线	总计
合格品	92	96	188
不合格品	8	4	12
总计	100	100	200

(1) 依据 $\alpha = 0.15$ 的独立性检验, 能否认为产品的包装合格与流水线的选择有关?

$$\text{附: } \chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \text{ 其中 } n = a+b+c+d.$$

临界值表:

$P(\chi^2 \geq x_\alpha)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
x_α	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

(2) 从抽取的 200 件产品中随机任取两件, 记“这两件产品中至少一件为合格品”为事件 B , 记“这两件产品均来自甲流水线”为事件 A , 求 $P(A|\bar{B})$;

(3) 公司工程师抽取几组一小时生产的产品数据进行不合格品情况检查分析. 在 x (单位: 百件) 件产品中, 得到不合格品数量 y (单位: 件) 的情况汇总如下表所示:

x (百件)	1	4	7	8	10
y (件)	2	14	24	35	40

求 y 关于 x 的经验回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$, 并预测一小时生产 2000 件时的合格品数 (精确到 1).

$$\text{附: } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}; \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

20. (本题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^x - ax$.

- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调区间;
- (2) 若 $f(x) \geq 1$, 求 a .

21. (本题满分 12 分)

一种微生物群体可以经过自身繁殖不断生存下来, 设一个这种微生物为第 0 代, 经过一次繁殖后为第 1 代, 再经过一次繁殖后为第 2 代 ..., 该微生物每代繁殖的个数是相互独立的, 且有相同的分布列, 设 X 表示 1 个微生物个体繁殖下一代的个数, $P(X=i) = p_i (i=0, 1, 2, 3) (p_i \geq 0)$.

- (1) 已知 $p_0 = 0.35, p_1 = 0.3, p_2 = 0.25, p_3 = 0.1$, 求 $E(X)$;
- (2) 设 $p(0 < p < 1)$ 表示该生物面临灭绝的概率, 当 $E(X) > 1$ 时, 证明: p 是关于 x 的方程 $p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 = x$ 的最小正实根.

22. (本题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x} - a$.

- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间;
- (2) 若 $a > 0$, 当 $x \in [1, e]$ 时, 函数 $F(x) = |x \ln x - ax^2|$ 有极小值, 求 a 的取值范围.

2021—2022青岛市期末考试高二数学答案

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

B A B C D A B C

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

9. AB; 10. BC; 11. BCD; 12. ACD.

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 240; 14. 1; 15. $(-\infty, \frac{5}{4}]$; 16. (1) $\frac{1}{4}$; (2) $\frac{3}{4}$.

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

解：由题知：每瓶饮料的利润

$$y = f(r) = 0.2 \times \frac{4\pi r^3}{3} - 0.8\pi r^2 = 0.8\pi(\frac{r^3}{3} - r^2), \quad 0 < r \leq 6 \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{所以, } f'(r) = 0.8\pi(r^2 - 2r) = 0.8\pi r(r - 2) \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{令 } f'(r) = 0, \text{ 解得 } r = 2 \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{当 } r \in (0, 2) \text{ 时, } f'(r) > 0, f(r) \text{ 在 } (0, 2) \text{ 上单调递增} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{当 } r \in (2, 6] \text{ 时, } f'(r) < 0, f(r) \text{ 在 } (2, 6] \text{ 上单调递减} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$(1) \text{ 因为 } f(6) > 0$$

$$\text{所以, 当 } r = 6\text{cm} \text{ 时, 每瓶饮料的利润最大} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 当 } r = 2\text{cm} \text{ 时, 每瓶饮料的利润最小} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$(3) \text{ 由 } f(r) = 0.8\pi(\frac{r^3}{3} - r^2) \geq 0 \quad (0 < r \leq 6), \text{ 解得 } 3 \leq r \leq 6$$

$$\text{故, 所求瓶子的半径取值范围是: } 3\text{cm} \leq r \leq 6\text{cm} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

18. (本小题满分 12 分)

解：(1) 由题意，原始平均分

$$\bar{x} = 45 \times 0.1 + 55 \times 0.15 + 65 \times 0.20 + 75 \times 0.3 + 85 \times 0.20 + 95 \times 0.05 = 70 \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 优秀等级最低分约为样本数据的 } 80\% \text{ 分位数} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$80 \text{ 分以下的学生所占的比例为 } 10\% + 15\% + 20\% + 30\% = 75\%$$

$$90 \text{ 分以下的学生所占的比例为 } 100\% - 5\% = 95\%$$

高二数学答案 第 1 页 (共 5 页)

所以, 80% 分位数一定位于 $[80, 90)$ 内 5 分

$$\text{由 } 80 + 10 \times \frac{0.80 - 0.75}{0.95 - 0.75} = 82.5$$

可以估计优秀等级最低分约为 82.5 分 6 分

(3) 用分层抽样的方法在分数段为 $[60, 80)$ 的学生中抽取一个容量为 5 的样本

$$\text{则分数段 } [60, 70) \text{ 中抽取的学生数为: } \frac{0.020}{0.020 + 0.030} \times 5 = 2 \text{ 人} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{分数段 } [70, 80) \text{ 中抽取的学生数为: } \frac{0.030}{0.020 + 0.030} \times 5 = 3 \text{ 人} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

则从 5 人中任意抽取 2 人的样本空间的样本点个数为 $C_5^2 = 10$ 9 分

记事件“这 2 人中至多有 1 人在分数段 $[60, 70)$ 内”为 C ,

记事件“这 2 人中有 1 人在分数段 $[60, 70)$ 内”为 C_1 ,

记事件“这 2 人中没有人分数段 $[60, 70)$ 内”为 C_2 ,

则 $C = C_1 + C_2$, 且 C_1 与 C_2 互斥 10 分

$$\text{所以 } P(C) = P(C_1 + C_2) = P(C_1) + P(C_2) = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_5^2} + \frac{C_2^0 C_3^2}{C_5^2} = \frac{9}{10} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. (本小题满分 12 分)

解: (1) 根据 2×2 列联表:

$$\text{所以 } K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(a + c)(b + d)(c + d)} = \frac{200 \times (92 \times 4 - 96 \times 8)^2}{100 \times 100 \times 188 \times 12} \approx 1.418 < 2.072 \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

依据 $\alpha = 0.15$ 的独立性检验,

不能认为产品的包装合格与装流水线的选择有关 4 分

$$(2) \text{ 由题知: } P(A|\bar{B}) = \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{\frac{C_8^2}{C_{200}^2}}{\frac{C_{12}^2}{C_{200}^2}} = \frac{C_8^2}{C_{12}^2} = \frac{14}{33} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(3) \text{ 由已知可得: } \bar{x} = \frac{1 + 4 + 7 + 8 + 10}{5} = 6 \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\bar{y} = \frac{2 + 14 + 24 + 35 + 40}{5} = 23 \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 1 \times 2 + 4 \times 14 + 7 \times 24 + 8 \times 35 + 10 \times 40 = 906 \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 1^2 + 4^2 + 7^2 + 8^2 + 10^2 = 230 \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

由回归直线的系数公式,

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5\bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5\bar{x}^2} = \frac{906 - 5 \times 6 \times 23}{(1^2 + 4^2 + 7^2 + 8^2 + 10^2) - 5 \times 6^2} = \frac{216}{50} = 4.32 \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 23 - 4.32 \times 6 = -2.92$$

$$\text{所以 } \hat{y} = \hat{b}x + \hat{a} = 4.32x - 2.92$$

当 $x = 20$ (百件) 时, $y = 4.32 \times 20 - 2.92 = 83.48 \approx 83$ 件

所以估计一小时生产 2000 件时的不合格品数约为 83 件 $\dots\dots\dots 12$ 分

20. (本小题满分 12 分)

解: (1) 因为 $f'(x) = e^x - a \dots\dots\dots 1$ 分

若 $a \leq 0$, 则 $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增 $\dots\dots\dots 2$ 分

若 $a > 0$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \ln a \dots\dots\dots 3$ 分

当 $x \in (-\infty, \ln a)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减 $\dots\dots\dots 4$ 分

当 $x \in (\ln a, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增 $\dots\dots\dots 5$ 分

(2) 由 (1) 知:

【法一】若 $a \leq 0$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(0) = 1$, $\dots\dots\dots 6$ 分

所以, 当 $x < 0$ 时, $f(x) < 1$, 不合题意 $\dots\dots\dots 7$ 分

若 $a > 0$, 因为 $f(x) \geq f(0) = 1$,

所以 $f'(0) = e^0 - a = 0$, 解得 $a = 1 \dots\dots\dots 8$ 分

此时 $f(x) = e^x - x$, 则 $f'(x) = e^x - 1 \dots\dots\dots 9$ 分

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减;

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

所以 $f(x) \geq f(0) = 1$, 符合题意 $\dots\dots\dots 11$ 分

综上, $a = 1 \dots\dots\dots 12$ 分

【法二】若 $a \leq 0$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(0) = 1$, $\dots\dots\dots 6$ 分

所以, 当 $x < 0$ 时, $f(x) < 1$, 不合题意 $\dots\dots\dots 7$ 分

若 $a > 0$, 则 $f(x) \geq f(\ln a) = a - a \ln a$

所以 $a - a \ln a \geq 1$, 即 $1 - \ln a - \frac{1}{a} \geq 0 \dots\dots\dots 8$ 分

令 $g(a) = 1 - \ln a - \frac{1}{a}$, $a > 0$, 则 $g'(a) = -\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} = \frac{1-a}{a^2} \dots\dots\dots 9$ 分

当 $a \in (0, 1)$ 时, $g'(a) > 0$, $g(a)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增;

当 $a \in (1, +\infty)$ 时, $g'(a) < 0$, $g(a)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减;

所以 $g(a) \leq g(1) = 0 \dots\dots\dots 11$ 分

综上, $a = 1 \dots\dots\dots 12$ 分

高二数学答案 第 3 页 (共 5 页)

21. (本小题满分 12 分)

解: (1) 由题知: $E(X) = 0 \times p_0 + 1 \times p_1 + 2 \times p_2 + 3 \times p_3 = 1.1$, 3 分

(2) 因为 $p = p_0 + p_1p + p_2p^2 + p_3p^3$ 5 分

所以, p 是方程 $p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 = x$ 的正实根 6 分

令 $f(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 - x (x > 0)$, 则 $f'(x) = p_1 + 2p_2x + 3p_3x^2 - 1$

令 $g(x) = p_1 + 2p_2x + 3p_3x^2 - 1$, 所以 $g'(x) = 2p_2 + 6p_3x > 0$ 7 分

所以 $f'(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上单调递增

又因为 $f'(0) = p_1 - 1 \leq 0$, $f'(1) = p_1 + 2p_2 + 3p_3 - 1 = E(X) - 1$ 8 分

当 $E(X) > 1$ 时, $f'(1) = E(X) - 1 > 0$

存在 $\alpha \in (0, 1)$, 使得 $f'(\alpha) = 0$ 9 分

当 $x \in (0, \alpha)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, \alpha)$ 上单调递减;

当 $x \in (\alpha, 1)$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(\alpha, 1)$ 上单调递增; 10 分

又因为 $f(0) = p_0 > 0$, $f(\alpha) < f(1) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 - 1 = 0$ 11 分

所以 $f(x)$ 在 $x \in (0, \alpha)$ 上存在唯一零点 $x = p$,

综上, 所以 p 是方程 $p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 = x$ 的最小正实根 12 分

22. (本小题满分 12 分)

解: (1) 由题知: $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ 1 分

当 $x = e$ 时, $f'(x) = 0$ 2 分

当 $0 < x < e$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > e$ 时, $f'(x) < 0$ 3 分

所以, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, e]$, 单调递减区间为 $[e, +\infty)$ 4 分

(2) $F(x) = |x \ln x - ax^2| = x^2 |f(x)|$ 5 分

由 (1) 知: $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递增, 所以 $-a = f(1) \leq f(x) \leq f(e) = \frac{1}{e} - a$ 6 分

(i) 当 $\frac{1}{e} - a = 0$, 即 $a = \frac{1}{e}$ 时, $-\frac{1}{e} \leq f(x) \leq 0$,

所以 $F(x) = \frac{x^2}{e} - x \ln x$, $F'(x) = \frac{2x}{e} - \ln x - 1$

令 $G(x) = F'(x)$, 所以 $G'(x) = \frac{2}{e} - \frac{1}{x}$

令 $G'(x) > 0$, 得 $x > \frac{e}{2}$; 令 $G'(x) < 0$, 得 $x < \frac{e}{2}$;

所以 $F'(x)$ 在区间 $[1, \frac{e}{2}]$ 单调递减, 在区间 $[\frac{e}{2}, e]$ 单调递增;

又因为 $F'(1) = \frac{2}{e} - 1 < 0$, $F'(e) = 0$, 所以 $F'(x) \leq 0$;

高二数学答案 第 4 页 (共 5 页)

所以 $F(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递减, $F(x)$ 无极大值 8 分

(ii) 当 $\frac{1}{e} - a < 0$, 即 $a > \frac{1}{e}$ 时, $f(x) < 0$,

所以 $F(x) = ax^2 - x \ln x$, 则 $F'(x) = 2ax - \ln x - 1$,

令 $G(x) = F'(x)$, 所以 $G'(x) = 2a - \frac{1}{x}$, 因为 $x \in [1, e]$, 所以 $\frac{1}{x} \in [\frac{1}{e}, 1]$

① 当 $2a \geq 1$, 即 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, 则 $G'(x) \geq 0$,

所以 $F'(x)$ 在区间 $[1, e]$ 单调递增, 所以 $F'(x) \geq F'(1) = 2a - 1 \geq 0$

所以 $F(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递增, $F(x)$ 无极大值 9 分

② 当 $\frac{1}{e} < a < \frac{1}{2}$, 即 $\frac{2}{e} < 2a < 1$ 时, 令 $G'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{2a}$

所以, 当 $x \in [1, \frac{1}{2a}]$ 时, $G'(x) \leq 0$, $F'(x)$ 在区间 $[1, \frac{1}{2a}]$ 单调递减;

当 $x \in [\frac{1}{2a}, e]$ 时, $G'(x) \geq 0$, $F'(x)$ 在区间 $[\frac{1}{2a}, e]$ 单调递增;

又因为 $F'(1) = 2a - 1 < 0$, $F'(e) = 2ae - 2 > 0$, 所以存在 $x_0 \in (1, e)$ 使得 $F'(x_0) = 0$

所以, $F(x)$ 在 $[1, x_0]$ 上单调递减, 在 $[x_0, e]$ 上单调递增

所以 $F(x)$ 在 $[1, e]$ 上有极小值 10 分

(iii) 当 $0 < a < \frac{1}{e}$ 时, 因为 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递增, 且 $f(1) = -a < 0$, $f(e) = \frac{1}{e} - a > 0$,

所以, 存在 $x_0 \in (1, e)$ 使得 $f(x_0) = 0$,

所以, 当 $x \in [1, x_0]$ 时, $f(x) < 0$; 当 $x \in [x_0, e]$ 时, $f(x) \geq 0$

所以函数 $F(x) = \begin{cases} ax^2 - x \ln x, 1 \leq x < x_0, \\ x \ln x - ax^2, x_0 \leq x \leq e, \end{cases}$ 11 分

所以 $F'(x) = \begin{cases} 2ax - \ln x - 1, 1 \leq x < x_0, \\ \ln x + 1 - 2ax, x_0 \leq x \leq e, \end{cases}$

设 $\varphi(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$ ($x \in [1, e]$), 则 $\varphi'(x) = -\frac{\ln x}{x^2} < 0$, 所以 $\varphi(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递减

所以, $\varphi(x) \geq \varphi(e) = \frac{2}{e} > 2a$,

即当 $x \in [1, e]$ 时, $2ax - \ln x - 1 < 0$, $\ln x + 1 - 2ax > 0$

所以, $F(x)$ 在 $[1, x_0]$ 上单调递减, 在 $[x_0, e]$ 上单调递增,

所以 $F(x)$ 在 $[1, e]$ 上有极小值

综上, a 的取值范围是 $(0, \frac{1}{e}) \cup (\frac{1}{e}, \frac{1}{2})$ 12 分

高二数学答案 第5页 (共5页)

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。



微信搜一搜

Q 齐鲁家长圈

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索