

长沙市明德教育集团 2023 年普通高等学校招生考试全仿真模拟试卷

# 数 学

注意事项:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分。答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答第 I 卷时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。

3. 回答第 II 卷时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。

4. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

## 第 I 卷

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{x | 0 < x \leq 1\}$ ,  $B = \{x | 2^x \leq 1\}$ , 设全集  $U = \mathbf{R}$ , 则  $\complement_U(A \cup B) = ( \quad )$

- A.  $(-\infty, 1)$       B.  $(-\infty, 1]$       C.  $(1, +\infty)$       D.  $[1, +\infty)$

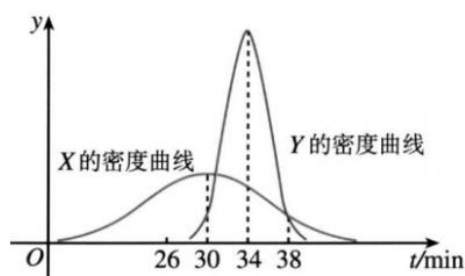
2. 已知复数  $z$  满足  $\frac{z-2i}{z} = i$ , 则  $|z| = ( \quad )$

- A.  $\sqrt{2}$       B.  $2\sqrt{2}$       C. 2      D. 4

3. 已知平面向量  $a, b$  满足  $|a| = 2$ ,  $|b| = \sqrt{3}$ , 且  $a$  与  $a-b$  的夹角为  $60^\circ$ , 则  $|a-b| = ( \quad )$

- A. 2      B.  $\sqrt{3}$       C.  $\sqrt{2}$       D. 1

4. 李明上学有时坐公交车,有时骑自行车.他各记录了 50 次坐公交车和骑自行车所花的时间,通过统计相关数据后,发现坐公交车用时  $X$  和骑自行车用时  $Y$  都近似服从正态分布.绘制了概率分布密度曲线,如图所示,则下列哪种情况下,应选择骑自行车( )



- A. 有 26 min 可用  
B. 有 30 min 可用  
C. 有 34 min 可用  
D. 有 38 min 可用

5. 已知角  $\theta$  的终边在直线  $y = 2x$  上, 则  $\frac{1 + \sin 2\theta}{\cos 2\theta} = ( \quad )$

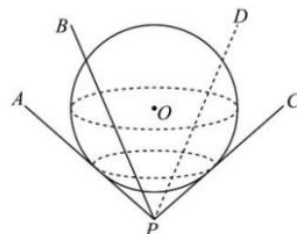
- A. -3      B. 3      C.  $-\frac{1}{3}$       D.  $\frac{1}{3}$

6. 已知抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点为  $F$ , 准线为  $l$ ,  $A$  为  $C$  上一点,  $AB \perp l$ , 垂足为  $B$ ,

$BF$  与  $y$  轴交点为  $M$ , 若  $|FA| = |FB|$ , 且  $\triangle ABM$  的面积为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 则  $C$  的方程为( )

- A.  $y^2 = 2x$       B.  $y^2 = 4x$       C.  $y^2 = 8x$       D.  $y^2 = 16x$

7. 如图, 一个由四根细铁杆  $PA$ 、 $PB$ 、 $PC$ 、 $PD$  组成的支架 ( $PA$ 、 $PB$ 、 $PC$ 、 $PD$  按照逆时针排布), 若  $\angle APB = \angle BPC = \angle CPD = \angle DPA = \frac{\pi}{3}$ , 一个半径为 1 的球恰好放在支架上与四根细铁杆均有接触, 则球心  $O$  到点  $P$  的距离是( )



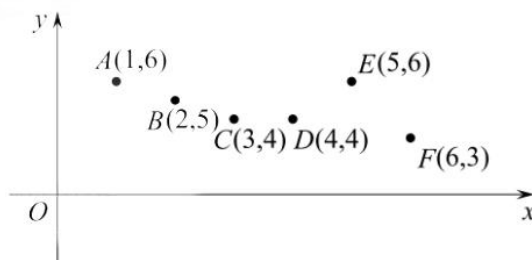
- A. 2  
B.  $\frac{3}{2}$   
C.  $\sqrt{2}$   
D.  $\sqrt{3}$

8. 已知实数  $p, q, r$  满足: 
$$\begin{cases} \log_5(2^p + 3^p) = \log_2(5^p - 3^p), \\ \log_7(3^q + 5^q) = \log_3(7^q - 5^q), \\ \log_9(5^r + 7^r) = \log_5(9^r - 7^r). \end{cases}$$
 则( )

- A.  $p < q < r$       B.  $r < p < q$       C.  $p < r < q$       D.  $r < q < p$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 6 个数据  $(x, y)$  构成的散点图, 如图所示, 采用一元线性回归模型建立经验回归方程, 若在这 6 个数据中去掉  $E(5, 6)$  后, 下列说法正确的是( )



- A. 解释变量  $x$  与预报变量  $y$  的相关性变强  
B. 样本相关系数  $r$  变大  
C. 残差平方和变小  
D. 决定系数  $R^2$  变小

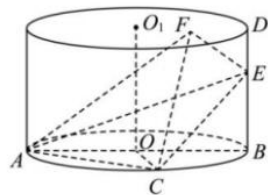
10. 若  $a, b > 0$ , 且  $a + b = 1$ , 则( )

- A.  $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}$       B.  $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} \geq 9$   
C.  $a^2 + 4b^2 \geq \frac{5}{4}$       D.  $\frac{b^2}{a} + \frac{a^2}{b} \geq 1$

11. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 已知  $(a+b):(b+c):(c+a) = 5:6:7$ , 则下列结论正确的是( )

- A.  $\sin A : \sin B : \sin C = 2:3:4$   
B.  $\triangle ABC$  为钝角三角形  
C. 若  $a = 6$ , 则  $\triangle ABC$  的面积是  $6\sqrt{15}$   
D. 若  $\triangle ABC$  外接圆半径是  $R$ , 内切圆半径为  $r$ , 则  $\frac{R}{r} = \frac{16}{5}$

12. 如图, 圆柱  $OO_1$  的底面半径和母线长均为 3,  $AB$  是底面直径, 点  $C$  在圆  $O$  上且  $OC \perp AB$ , 点  $E$  在母线  $BD$  上,  $BE = 2$ , 点  $F$  是上底面的一个动点, 则( )



- A.  $AF + FE$  的最小值为  $2\sqrt{13}$   
 B. 若  $AE \perp CF$ , 则点  $F$  的轨迹长为 4  
 C. 若  $AF \perp FE$ , 则四面体  $ACEF$  的外接球的表面积为  $40\pi$   
 D. 若  $AF \perp FE$ , 则点  $F$  的轨迹长为  $2\sqrt{6}\pi$

### 第 II 卷

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13.  $\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$  的展开式中二项式系数最大的项是\_\_\_\_\_.

14. 中国古代数学著作《增减算法统宗》中有这样一段记载: “三百七十八里关, 初行健步不为难, 次日脚痛减一半, 如此六日过其关.” 则此人在第六天行走的路程是\_\_\_\_\_里 (用数字作答).

15. 直线  $l: x + 2y - 4 = 0$  与椭圆  $\frac{x^2}{m+1} + \frac{y^2}{m} = 1 (m > 0)$  有且仅有一个公共点  $P$ , 则  $m =$ \_\_\_\_\_, 点  $P$  的坐标是\_\_\_\_\_.

16. 若  $\forall x \in (0, +\infty), \frac{\ln x}{x} \leq a - \frac{b}{x} \leq x (a, b \in \mathbf{R})$ , 则  $b - \frac{1}{2}a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

已知等差数列  $\{a_n\}$  前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_1 = 1$ ,  $S_9 = 9a_6 - 18$ .

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 若数列  $\{b_n\}$  满足  $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = (2n-3) \cdot 2^{n+1} + 6$ ,

求和:  $T_n = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_2 + a_nb_1$ .

18. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$  在区间  $(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3})$  单调, 其中  $\omega$  为正整数,  $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ , 且  $f(\frac{\pi}{4}) = -f(\frac{7\pi}{12})$ .

(1) 求  $y = f(x)$  图象的一个对称中心;

(2) 若  $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ , 求  $\varphi$ .

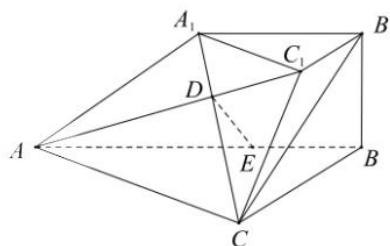
19. (本小题满分 12 分)

如图, 三棱台  $ABC - A_1B_1C_1$ ,  $AB \perp BC$ ,  $AC \perp BB_1$ , 平面  $ABB_1A_1 \perp$  平面  $ABC$ ,  $AB = 6, BC = 4$ ,  $BB_1 = 2$ ,  $AC_1$  与  $A_1C$  相交于点  $D$ ,  $\overline{AE} = 2\overline{EB}$ , 且  $DE \parallel$  平面  $BCC_1B_1$ .

(1) 求三棱锥  $C - A_1B_1C_1$  的体积;

(2) 平面  $A_1B_1C$  与平面  $ABC$  所成角为  $\alpha$ ,  $CC_1$  与平面  $A_1B_1C$

所成角为  $\beta$ , 求证:  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ .



20. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = ax(x^2 - 3) + 1 (a \neq 0)$ .

(1) 讨论函数  $f(x)$  的单调性;

(2) 若  $f(x)$  有三个零点  $x_1, x_2, x_3 (x_1 < x_2 < x_3)$ , 且  $f(x)$  在  $x = x_0$  处的切线经过点  $(x_1, 0)$ ,  $x_0 \neq x_1$ ,

求证:  $x_1 = -2x_0$ .

21. (本小题满分 12 分)

甲、乙两选手进行一场体育竞技比赛，采用  $2n-1$  局  $n$  胜制 ( $n \in \mathbf{N}^*$ ) 的比赛规则，即先赢下  $n$  局比赛者最终获胜. 已知每局比赛甲获胜的概率为  $p$ ，乙获胜的概率为  $1-p$ ，比赛结束时，甲最终获胜的概率为  $P_n (n \in \mathbf{N}^*)$ .

(1) 若  $p = \frac{1}{2}, n = 2$ ，结束比赛时，比赛的局数为  $X$ ，求  $X$  的分布列与数学期望；

(2) 若采用 5 局 3 胜制比采用 3 局 2 胜制对甲更有利，即  $P_3 > P_2$ ，

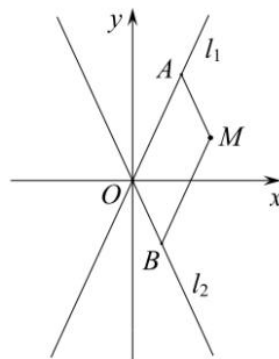
(i) 求  $p$  的取值范围；(ii) 证明数列  $\{P_n\}$  单调递增，并根据你的理解说明该结论的实际含义.

22. (本小题满分 12 分)

如图，已知直线  $l_1: y = \sqrt{3}x$ ， $l_2: y = -\sqrt{3}x$ ， $M$  是平面内一个动点， $MA \parallel l_2$  且  $MA$  与  $l_1$  相交于点  $A$  ( $A$  位于第一象限)， $MB \parallel l_1$  且  $MB$  与  $l_2$  相交于点  $B$  ( $B$  位于第四象限)，若四边形  $OAMB$  ( $O$  为原点) 的面积为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

(1) 求动点  $M$  的轨迹  $C$  的方程；

(2) 过点  $F(2,0)$  的直线  $l$  与  $C$  相交于  $P, Q$  两点，是否存在定直线  $l'$ ，使以  $PQ$  为直径的圆与直线  $l'$  相交于  $E, F$  两点，且  $\frac{|EF|}{|PQ|}$  为定值，若存在，求出  $l'$  的方程，若不存在，请说明理由.



## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

