

第 34 届北京市高中力学竞赛决赛试题

(首师大附中杯)

(全卷满分 150 分)

2021 年 5 月 22 日 9:00~11:00

题 号	一 (填空)	二 (计算题)					总 分
		6	7	8	9	10	
分 数							
阅卷人							
复查人							

得 分

一、填空题 (共有 5 个小题, 每小题 10 分, 共 50 分)

1. 如图 1 所示, 列车沿水平轨道上做匀速运动, 速度大小为 v , 车厢内水平光滑桌面上固定一块竖直木板, 轻质弹簧一端固定于木板上, 质量为 m 的物块将弹簧压缩. 物块释放后被弹簧弹开, 弹离开弹簧时相对与车厢的速度大小为 u . 站在地面上的人看, 从释放到刚离开弹簧的过程中, 弹簧与物块组成的系统机械能是否守恒? 答: _____, 理由: _____.

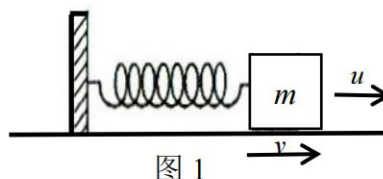


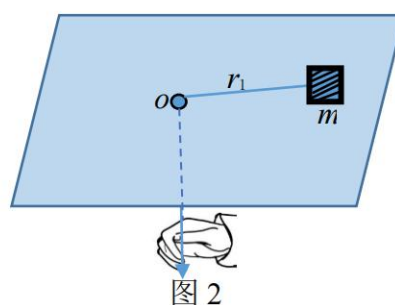
图 1

2. 一架重为 mg 的直升机相对于地面静止悬停在空中, 其螺旋桨迅速转动使面积为 S 的静止空气以某一速度向下运动, 空气对直升机的反作用力与重力平衡. 已知空气的密度为 ρ , 此时发动机消耗的最小功率为_____.

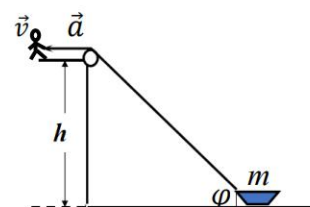
3. 在高速公路上利用了许多新的技术手段对汽车的通行进行监测. 高速公路对五轴卡车的限载总质量为 $43t$, 当一辆 5 轴的载重卡车缓慢通过高速路入口时, 收费站的称重计测到的 5 根轴显示的质量数分别是 $7.50t$ 、 $9.20t$ 、 $9.20t$ 、 $9.72t$ 和 $9.25t$, 这辆卡车超载了吗? _____ (填“超载”或“不超”). 高速公路上对小轿车

的限速为 120km/h . 在高速上有各种测速装置, 有瞬时测速和区间测速等. 一位小轿车的司机在驾驶过程中看到有一块提示牌上写有“测速起点, 测速距离 15.8km ”, 这位司机行驶完这段测速区间最少要用多少分钟才不会超速? _____min (保留两位有效数字).

4. 如图 2 所示, 不计摩擦, 在手拉力的作用下, 质量为 m 的物块, 绕 o 点在水平面内做角速度为 ω_1 的匀速圆周运动, 圆的半径为 r_1 . 如缓慢增大拉力使物块做圆周运动的半径减小到 r_2 , 这过程中拉力做功为_____. 强调拉力缓慢增大是因为



5. 如图 3 所示, 人在岸上用轻绳拉小船, 绳与水面夹角为 φ 时, 人向左行进速度和加速度分别为 $\vec{v}$ 和 $\vec{a}$, 不计水的水平阻力, 且船未离开水. 此时船的向左速度_____; 船加速度沿绳指向滑轮方向分量_____; 人施于绳端拉力提供的功率_____.



二、计算题（共 100 分）

得 分

6.（15 分）一长为 L ，质量为 M 的梯子，质心在梯子正中间，斜靠在墙边，如图 4 所示，梯子下端连一跟劲度系数为 k 的弹簧，当梯子靠墙竖直放置时，弹簧处于自然长度，墙和地面都是光滑的，当梯子倚墙和地面成 θ 角且处于平衡状态时（此时弹簧处于弹性限度内），求：

- (1) 地面对梯子的作用力大小；
- (2) 墙对梯子的作用力的大小；
- (3) M 、 k 、 L 、 θ 应满足怎样的关系式？

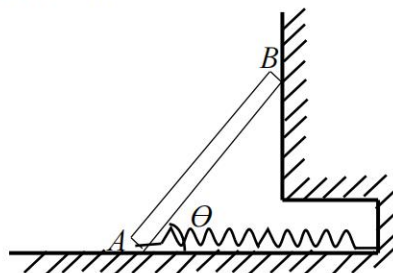


图 4

得 分

7. (15 分) 2020 年 12 月 1 日我国嫦娥五号探测器首次在月球表面着陆, 并取回 2kg 的月球表面土壤样本. 取样的过程是这样的, 着陆器

落到月球表面选好的位置上, 在月球表面取样, 轨道舱和返回舱在距离月球表面 200km 的轨道上绕着月球做圆周运动. 取样的月壤封装在上升器当中, 上升器从月球表面起飞与轨道舱对接, 并把样本转移到返回舱当中. 轨道舱要绕月飞行数天后选择合适的时机返回地球. 已知: 月球的半径为 $r=1.737\times 10^3\text{km}$, 月球的质量为 $M=7.349\times 10^{22}\text{kg}$, 万有引力常量为 $G=6.67\times 10^{-11}\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$, 求:

- (1) 月球引力作用下月球表面物体的加速度;
- (2) 这 2kg 的月球样本从月球表面起飞直到到达返回舱的过程, 样本的机械能增加的数值.

得 分

8. (20 分) 在实验室内观察到相距很远的一个质子 (质量为 m_p) 和一个氦核 (质量 $M=4m_p$) 在一直线上相向运动, 速率都是 v_0 . 质子与氦核之间相互作用力的势能为 $E_p = \frac{k}{r} (k>0)$ (忽略粒子的重力和它们之间的万有引力),

- (1) 请定性分析两个粒子速度满足什么条件时距离最近.
- (2) 距离最近时速度大小是多少?
- (3) 最近距离是多少?

得 分

9. (25 分) 用质量为 M 的铁锤沿水平方向将质量为 m 、长为 l 的铁钉敲入木板, 铁锤每次以相同的速度 v_0 击钉, 随即与钉一起运动并使钉进入木板一定深度. 在每次受击进入木板的过程中, 钉所受到的平均阻力为前一次受击进入木板过程所受平均阻力的 k 倍 ($k>1$). 若敲击三次后钉恰好全部进入木板, 求:

- (1) 铁锤敲击铁钉后, 锤与钉的共同速度;
- (2) 第一次进入木板过程中钉所受到的平均阻力.

得 分

10. (25 分) 水平地面上有一辆平板车以匀加速 $\vec{a}$ 沿直线运动, 如图 5 所示, 在小车正上方, 距小车高 h 处抛出一质量为 m 的小球. 站在小

车上看, 小球速度大小为 v_0 , 方向垂直向下. 忽略空气阻力, 求:

- (1) 站在小车上看小球的加速度大小和方向;
- (2) 小球相对于小车的运动轨迹;
- (3) 当 $v_0=0$ 时相对小车运动轨迹是什么?

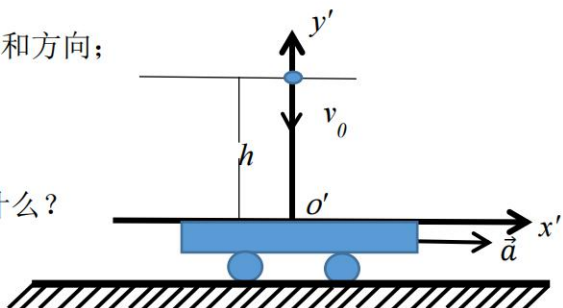


图 5

第 34 届北京市高中力学竞赛决赛试题答案

(首师大附中杯)

一、 填空题

1. 不守恒, 竖直木板对弹簧与物块组成系统的力做功.

2. $\frac{1}{2}mg\sqrt{\frac{mg}{\rho S}}.$

3. 超载(44.87t), 7.9min.

4. $\frac{1}{2}m\omega_1^2 r_1^2 \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_2^2}$, 可以认为切线方向不受力, 并用角动量守恒求得.

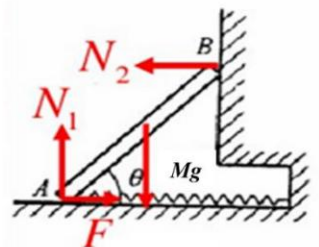
5. $v/\cos\varphi \quad a+v^2\tan^2\varphi\sin\varphi/h \quad \frac{mv}{\cos^2\varphi} (a+v^2\tan^2\varphi\sin\varphi/h).$

二、计算题

6. 解

(1) 梯子静止并达到平衡, 说明它所受的合外力为 0, 同时合外力矩也为 0, 由竖直方向上合外力为 0, 可以得到 $N_1 = Mg$;

(2) 水平方向上的合外力为 0, 则墙对梯子的作用力等于弹簧的弹力, 其大小等于 $N_2 = kL \cos \theta$, 也可以选取过 A 端点并且垂直板面的转轴, 由合力矩为 0, 可以得到 $Mg \frac{L}{2} \cos \theta = N_2 L \sin \theta$, $N_2 = \frac{Mg}{2} \cot \theta$;



(3) $M = 2kL \sin \theta / g.$

7. 解

(1) 月球表面一个质量为 m 的物体受到月球的引力为 $G \frac{Mm}{r^2}$, 由牛顿第二定律得

$$F = G \frac{Mm}{r^2} = ma$$

$$a = G \frac{M}{r^2} = 6.67 \times 10^{-11} \frac{7.349 \times 10^{22}}{(1.737 \times 10^6)^2} = 1.62(\text{m/s}^2)$$

(2) 取远离月球处为引力势能零点, 样品在月球表面时具有引力势能 E_{p1} . 与轨道舱对接完成后, 样品增加了引力势能, 具有引力势能 E_{p2} , 还具有一定的动能 E_k . 设轨道舱的质量为 m_0 , 轨道舱绕月球运行的轨道半径为 r_0 , 运动速度为 v , 对

$$\text{轨道舱有} \quad G \frac{m_0 M}{r_0^2} = m_0 \frac{v^2}{r_0} \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$$

土壤样品增加的能量为 ΔE ,

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_k + E_{p2} - E_{p1} = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{mM}{r_0} + G \frac{mM}{r} \\ \Delta E &= \frac{1}{2} G \frac{mM}{r_0} - G \frac{mM}{r_0} + G \frac{mM}{r} = GmM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2r_0} \right) \end{aligned}$$

代入数据 $\Delta E = 3.11 \times 10^6 \text{ J}$

8. 解

(1) 质子与氦核接近, 两粒子之间相互作用力为斥力, 均减速运动; 当质子速度减小到 0 后, 质子反向加速运动运动, 氦核继续减速向前; 直到质子加速到与氦核速度大小相同时距离最近.

(2) 距离最近时, 速度大小 v , 方向如图所示. 由动量守恒可得

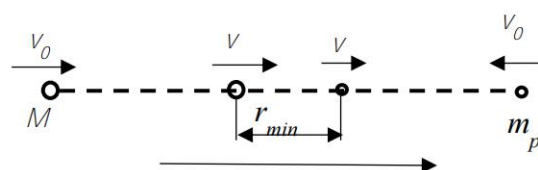
$$-m_p v_0 + M v_0 = m_p v + M v,$$

$$\text{解得 } v = \frac{4m_p - m_p}{4m_p + m_p} v_0 = \frac{3}{5} v_0$$

(3) 由能量守恒可得

$$\frac{k}{r} + \frac{1}{2} m_p v^2 + \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} m_p v_0^2 + \frac{1}{2} M v_0^2$$

$$\text{所以 } r_{\min} = \frac{5}{8} \frac{k}{m_p v_0^2}.$$



9. 解

(1) 锤子与钉子相碰后达到共同速度 v , 碰撞过程中动量守恒

$$Mv_0 = (M + m)v$$

$$v = \frac{M}{M + m}v_0$$

(1)

(2) 第一次敲击后钉子进入木板的深度为 l_1 ，钉子受到的平均阻力为 f_1 ，根据动能定理

$$-f_1 l_1 = 0 - \frac{1}{2}(M + m)v^2$$

$$f_1 l_1 = \frac{M^2 v_0^2}{2(M + m)}$$

(2)

第二次敲击后钉子进入木板的深度为 l_2 ，钉子受到的平均阻力为 kf_1 ，根据动能定理

$$-kf_1 l_2 = 0 - \frac{1}{2}(M + m)v^2$$

$$kf_1 l_2 = \frac{M^2 v_0^2}{2(M + m)}$$

(3)

第三次敲击后钉子进入木板的深度为 l_3 ，钉子受到的平均阻力为 $k^2 f_1$ ，根据动能定理

$$-k^2 f_1 l_3 = 0 - \frac{1}{2}(M + m)v^2$$

$$k^2 f_1 l_3 = \frac{M^2 v_0^2}{2(M + m)}$$

(4)

整理 (2)、(3)、(4) 式得到

$$l_1 = \frac{M^2 v_0^2}{2f_1(M+m)}$$

$$l_2 = \frac{M^2 v_0^2}{2kf_1(M+m)}$$

$$l_3 = \frac{M^2 v_0^2}{2k^2 f_1(M+m)}$$

利用

$$l = l_1 + l_2 + l_3$$

$$f_1 = \frac{M^2 v_0^2}{2(M+m)} \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{kl} + \frac{1}{k^2 l} \right)$$

$$f_1 = \frac{M^2 v_0^2}{2(M+m)} \left(\frac{1+k+k^2}{k^2 l} \right)$$

10. 解

(1) 由 $\vec{a}_{\text{绝对}} = \vec{a}_{\text{相对}(r)} + \vec{a}_{\text{牵连}(o')}$,

得车在 $o'-x'y'$ 中加速度为 $\vec{a}_r = -\vec{a}_{o'} + \vec{g}$

投影得 $a_{rx} \vec{i} + a_{ry} \vec{j} = -a \vec{i} - g \vec{j}$

所以 $a_{rx} = -a$ $a_{ry} = -g$

$$(2) \quad v_{x'} = -at \quad x' = -\frac{1}{2}at^2$$

$$v_{y'} = v_0 - gt$$

$$y' = h - v_0 \sqrt{\frac{-2x'}{a}} + \frac{g}{a} x'$$

(3) $v_0 = 0$ 时, $y' = h + \frac{g}{a} x'$ 为直线