参考答案

一、选择题

1. B	2. D	3. C	4. C	5. C	6. A
7. D	8. B	9. A	10. D	11. C	12. B

二、填空题

13. $-\sqrt{3}$　　14. $\frac{5}{2}$　　15. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　16. $[\frac{e}{\ln 2}, e^{e-1})$

提示：

1. $A=\{x|x<1\}$，$B=\{x|x>2$ 或 $x\leqslant\frac{1}{2}\}$，$\therefore \complement_R B=\{x|\frac{1}{2}<x\leqslant 2\}$，$\therefore \complement_R B\cap A=\{x|\frac{1}{2}<x<1\}$. 故选 B.

2. 依题意得 $z_2=-3-i$，$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3-i}{-3-i}=-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$. 故选 D.

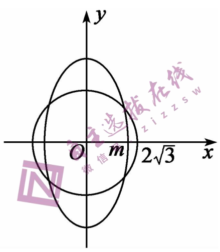
3. 当 $x<2$ 时，$f(x)$ 只有一个零点，且该零点为负数；当 $x\geqslant 2$ 时，若 $f(x)$ 有零点，则 $\sqrt{-2a}\geqslant 2$，即 $a\leqslant -2$，此时 $f(x)$ 只有一个零点，且该零点为正数，故"$a\leqslant -2$"是 $f(x)$ 有 2 个零点的充要条件. 故选 C.

4. 由 $2^0=1$，$2^{12}=4096$，$2^{13}=8192$，可得输出 n 的值为 13.

5. 不妨设 $f(x)=\sin\omega x$，$\because f(x)$ 图象关于 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称，$\therefore \frac{\omega\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{N}$，$\therefore \omega=3k+\frac{3}{2}$，$k\in\mathbf{N}$，又 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{6}]$ 上单调，$\therefore \frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{\omega}\geqslant\frac{\pi}{6}$，故 $0<\omega\leqslant 3$，故 $\omega=\frac{3}{2}$. 故选 C.

6. $\triangle ABC$ 的外接圆直径为 $2r=\frac{3}{\sin\frac{\pi}{6}}=6$，故三棱锥外接球半径 $R=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$，故外接球的表面积为 $4\pi R^2=72\pi$. 故选 A.

7. 设动点 $P(x,y)$，由题得 $\sqrt{(x-6)^2+y^2}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{(x-2)^2+y^2}$，化简得 $x^2+y^2=12$. $\therefore$ 动点 P 的轨迹是以原点为圆心，以 $2\sqrt{3}$ 为半径的圆. $\because P$ 点轨迹与椭圆 C 恰有 4 个不同的交点，$\therefore 0<m<2\sqrt{3}$. $\therefore$ 椭圆 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{16-m^2}}{4}>\frac{\sqrt{16-(2\sqrt{3})^2}}{4}=\frac{1}{2}$. $\because$ 椭圆的离心率 $e\in(0,1)$，$\therefore$ 椭圆 C 的离心率的取值范围为 $(\frac{1}{2},1)$. 故选 D.

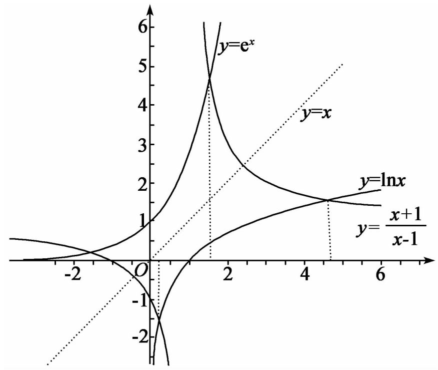


8. $(2-x)^6=a_0+a_1(1+x)+a_2(1+x)^2+\cdots+a_6(1+x)^6$，以 $x-1$ 代替 x，得 $(3-x)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_6x^6$，$\therefore$ 其通项公式为 $T_{r+1}=C_6^r3^{6-r}(-x)^r=C_6^r3^{6-r}(-1)^rx^r$，令 $r=4$，$\therefore a_4=C_6^43^{6-4}(-1)^4=135$，故选 B.

9. 对于 A，$\ln a^2>\ln b^2\Rightarrow|a|>|b|\Rightarrow 2^{|a|}>2^{|b|}$，成立；对于 B，$\frac{|a|}{a^2}>\frac{|b|}{b^2}$，则 $\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$，则 $|a|<|b|$，故不能推出 $2^a<2^b$，不成立；对于 C，$b>a>e$，由 $\frac{\ln a}{a}>\frac{\ln b}{b}$ 得 $a^b>b^a$，不成立；对于 D，由 $0<2a<b<3-a^2$，则 $0<a<\frac{b}{2}<\frac{3-a^2}{2}<\frac{3}{2}$，故 $\sin a<\sin\frac{b}{2}$，不成立. 故选 A.

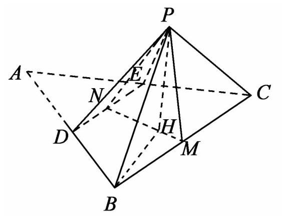
10. 设动圆 Q 圆心为 (x,y)，$A(x_1,y_1)$，$B(x_1,y_1)$，$D(x_0,-1)$，依题意得：$\sqrt{x^2+(y-1)^2}=|y+1|$，即 Γ 的方程为 $x^2=4y$，故 A 正确；由 $x^2=4y$ 得，$y=\frac{1}{4}x^2$，$\therefore y=\frac{1}{2}x$，$\therefore$ 切线 DA 的方程为：$y-y_1=\frac{1}{2}x_1(x-x_1)$，即 $y=\frac{1}{2}x_1x-\frac{1}{2}x_1^2+v_1$，又 $x_1^2=4y_1$，$\therefore y=\frac{1}{2}x_1x-y_1$，同理可得切线 DB 的方程为 $y=\frac{1}{2}x_2x-y_2$，又切线 LA，DB 经过点 $D(x_0,-1)$，$\therefore y_1=\frac{1}{2}x_0x_1+1$，$y_2=\frac{1}{2}x_0x_2+1$，故直线 AB 的方程为 $y=\frac{1}{2}x_0x+1$，$\therefore$ 直线 AB 过定点 $F(0,1)$，故 B 正确；联立 $\begin{cases}y=\frac{1}{2}x_0x+1\\x^2=4y\end{cases}$ 消 y 整理得 $x^2-2x_0x-4=0$，故 $x_1+x_2=2x_0$，$x_1x_2=-4$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(\frac{1}{2}x_0x_1+1)(\frac{1}{2}x_0x_2+1)=(1+\frac{1}{4}x_0^2)x_1x_2+\frac{1}{2}x_0(x_1+x_2)+1=-3<0$，$\therefore\angle AOB$ 为钝角，故 C 正确；由于直线 AB 恒过抛物线焦点 $F(0,1)$，设 AB 中点为 M，过 A，M，B 向直线 $y=-1$ 作垂线，垂足分别为 A'、M'、B'，连结 AM'、BM'，由抛物线定义 $|AA'|=|AF|$，$|BB'|=|BF|$，$\therefore|MM'|=\frac{1}{2}(|AA'|+|BB'|)=\frac{1}{2}(|AF|+|BF|)=\frac{1}{2}|AB|$，$\therefore$ 以 AB 为直径为圆与直线 $y=-1$ 相切，故 D 错误. 故选 D.

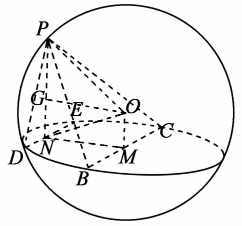
11. 对于 A 选项，由函数 $y=e^x$ 与 $y=\frac{x+1}{x-1}$ 满足性质 $f(-x)=\frac{1}{f(x)}$，则 x_1 与 $-x_1$ 都为函数 $y=e^x-\frac{x+1}{x-1}$ 的零点，有 $x_2=-x_1$，即 A 正确；对于 B 选项，由函数 $y=\ln x$ 与 $y=\frac{x+1}{x-1}$ 都满足性质 $f(\frac{1}{x})=-f(x)$，则 x_3 与 $\frac{1}{x_3}$ 都为函数 $y=\ln x-\frac{x+1}{x-1}$ 的零点，有 $x_4=\frac{1}{x_3}$，即 B 正确；对于 C 选项，如图，由函数 $y=e^x$ 与 $y=\ln x$ 关于直线 $y=x$ 对称，可得 $x_1=\ln x_3$，有 $\frac{\ln x_3}{x_1}=1$，即 C 错误；对于 D 选项，同上，由 $\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2=\ln x_4\end{cases}$，可得 $x_1+\ln x_4=0$，有 $x_4e^{x_1}=1$，即 D 正确. 故选 C.



12. 对于 A 选项，当平面 $PDE\perp$ 平面 $BCED$ 时，四棱锥 $P-BCED$ 的体积最大，此时体积 $V=\frac{1}{3}\times\frac{(2+4)\times\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}=3$，即 A 正确. 如下左图，设 M，N 分别为 BC，DE 的中点，对于 B 选项，设平面 $PDE\cap$ 平面 $PBC=l$，则 $l\,/\!/\,BC$，有 $l\perp MN$，$l\perp$

PM,可得 $l\perp$平面 PMN,即$\angle NPM$ 为平面 PDE 与平面 PBC 所成的二面角,由 $PN=NM$ 可知,$\angle NPM\neq 90^\circ$,即 B 错误. 对于 C 选项,过 P 作 MN 的垂线,垂足为 H,则 $PH\perp$平面 $BCED$,则$\angle PBH$ 为直线 PB 与平面 $BCED$ 的所成角.





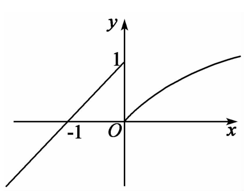
依题意可知,$PB=PC=2\sqrt{2}$,$PM=2$,$PN=NM=\sqrt{3}$,在$\triangle PMN$ 中,由余弦定理可得 $\cos\angle PMN=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,有 $\sin\angle PMN=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$;在$\triangle PMH$ 中,$PH=PM\sin\angle PMN=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$,从而直线 PB 与平面 $BCED$ 所成角的正弦值为$\dfrac{PH}{PB}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,即 C 正确. 对于 D 选项,当 $PB=\sqrt{10}$时,由 $BN=\sqrt{7}$,可知 $PN^2+BN^2=PB^2$,即 $PN\perp BN$,又 $PN\perp DE$,且 $BN\cap DE=N$,则 $PN\perp$平面 $BCED$,又 $PN\subset$平面 PDE,则平面 $PDE\perp$平面 $BCED$. 设四棱锥 $P-BCED$ 的外接球球心为 O,$\triangle PDE$ 的外心为 G,如上右图,易知点 M 为等腰梯形 $BCED$ 的外心,则四边形 $OGNM$ 为矩形,且 $OM=GN=\dfrac{1}{3}PN=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,可得 $R^2=OB^2=OM^2+MB^2=\dfrac{13}{3}$,从而所求外接球的表面积为$\dfrac{52}{3}\pi$,即 D 正确. 故选 B.

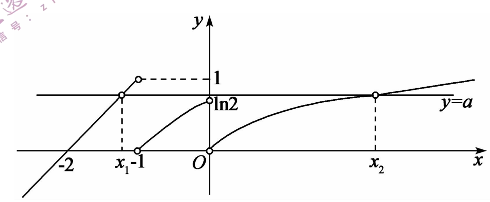
13. 依题意得 $2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}=(2-\cos\alpha)\cdot\dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$,又 $\alpha\in(-\dfrac{\pi}{2},0)$,$\sin\dfrac{\alpha}{2}\neq 0$,$\therefore 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=2-\cos\alpha$,$\therefore\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$,又 $\alpha\in(-\dfrac{\pi}{2},0)$,故 $\alpha=-\dfrac{\pi}{3}$,则 $\tan\alpha=-\sqrt{3}$.

14. 由 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(5,-2)$,可得 $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=5-2\lambda=0$,解得 $\lambda=\dfrac{5}{2}$.

15. 依题意得 $A(\sqrt{6},\dfrac{\sqrt{6}x_0-4}{2y_0})$,$B(\dfrac{2\sqrt{6}}{3},\dfrac{\dfrac{2\sqrt{6}}{3}x_0-4}{2y_0})$,$y_0^2=2(\dfrac{x_0^2}{4}-1)$,则 $\dfrac{|AF|^2}{|BF|^2}=\dfrac{(\dfrac{\sqrt{6}x_0-4}{2y_0})^2}{\dfrac{2}{3}+(\dfrac{\dfrac{2\sqrt{6}x_0}{3}-4}{2y_0})^2}=\dfrac{16x_0^2-24\sqrt{6}x_0+48}{12x_0^2-16\sqrt{6}x_0+32}=\dfrac{3}{2}$,$\therefore\dfrac{|AF|}{|BF|}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

16. 法 1:令 $t=f(x)$,画出函数 $f(x)$的图象,由 $f(t)=a$,可知:当 $a<0$ 时,方程 $f(t)=a$ 只有一个实根 $t=a-1<-1$,则方程 $f(x)=t$ 也只有一个实根,不合题意. 当 $a=0$ 时,方程 $f(t)=a$ 有两个实根,$t_1=-1$,$t_2=0$,则方程 $f(x)=t_1$ 有一个实根,方程 $f(x)=t_2$ 有两个实根,不合题意. 当 $0<a<\ln 2$ 时,方程 $f(t)=a$ 有两个实根,$t_1=a-1<0$,$t_2=e^a-1\in(0,1)$,则方程 $f(x)=t_1$ 有一个实根,方程 $f(x)=t_2$ 有两个实根,不合题意. 当 $\ln 2\leqslant a<1$ 时,方程 $f(t)=a$ 有两个实根,$t_1=a-1\in[\ln 2-1,0)$,$t_2=e^a-1\in[1,e-1)$,则方程 $f(x)=t_1$ 有一个实根 x_1,方程 $f(x)=t_2$ 有一个实根 x_2,符合题意. 此时,$x_1+2=t_1=a$,$\ln(x_2+1)=e^a-1$,有 $\ln(\dfrac{x_2+1}{x_1+2})=\ln(x_2+1)-\ln(x_1+2)=e^a-\ln a-1$. 设 $g(a)=e^a-\ln a-1$,则 $g'(a)=e^a-\dfrac{1}{a}$. 由 $g'(a)$单调递增,可得 $g'(a)\geqslant g'(\ln 2)=2-\dfrac{1}{\ln 2}>0$,则 $g(a)$单调递增,有 $g(a)\in[1-\ln(\ln 2),e-1)$,即$\dfrac{x_2+1}{x_1+2}\in[\dfrac{e}{\ln 2},e^{e-1})$. 当 $a\geqslant 1$ 时,方程 $f(t)=a$ 有一个实根 $t=e^a-1\geqslant e-1>1$,方程 $f(x)=t$ 只有一个实根,不合题意. 综上可知,$\dfrac{x_2+1}{x_1+2}\in[\dfrac{e}{\ln 2},e^{e-1})$. 法 2:设 $g(x)=f(f(x))$,则$g(x)=\begin{cases}x+2, & x<-1\\ \ln(x+2), & -1\leqslant x<0\\ \ln(\ln(x+1)+1), & x\geqslant 0\end{cases}$,作出图象如下,易知 $a\in[\ln 2,1)$. 由 $x_1+2=a$,$\ln(\ln(x_2+1)+1)=a$,即 $x_2+1=e^{e^a-1}$,可得$\dfrac{x_2+1}{x_1+2}=\dfrac{e^{e^a-1}}{a}$. 设 $\varphi(a)=\dfrac{e^{e^a-1}}{a}$,$a\in[\ln 2,1)$,则 $\varphi'(a)=\dfrac{e^{e^a-1}(ae^a-1)}{a^2}>0$,可得函数 $\varphi(a)$单调递增,有 $\varphi(a)\in[\dfrac{e}{\ln 2},e^{e-1})$,即$\dfrac{x_2+1}{x_1+2}\in[\dfrac{e}{\ln 2},e^{e-1})$.





三、解答题

17. (1)由 $a_na_{n+1}=\dfrac{3a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}-3a_n}$得 $a_{n+1}-3a_n=\dfrac{3a_{n+1}-a_n}{a_na_{n+1}}=\dfrac{3}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}}$,(1 分)

$\therefore a_{n+1}+\dfrac{1}{a_{n+1}}=3(a_n+\dfrac{1}{a_n})$,(3 分)

$\because a_1+\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{5}{2}\neq 0$,

则$\{a_n+\dfrac{1}{a_n}\}$是公比为 3 的等比数列.(4 分)

(2)由(1)得 $a_n+\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{5}{2}\cdot 3^{n-1}$.

$\therefore b_n=a_n^2+\dfrac{1}{a_n^2}=(a_n+\dfrac{1}{a_n})^2-2=\dfrac{25}{4}\cdot 9^{n-1}-2$,(6 分)

$\therefore S_n=\dfrac{25}{4}\cdot\dfrac{1-9^n}{1-9}-2n=\dfrac{25}{32}(9^n-1)-2n$.(8 分)

$\therefore\dfrac{S_n}{2}=\dfrac{25}{64}(9^n-1)-n$,

$\because$25 与 64 互素,$\therefore\dfrac{S_n}{2}\in\mathbf{Z}\Leftrightarrow 64\mid(9^n-1)$.

$\because 9^n-1=(1+8)^n-1=C_n^0+C_n^1\cdot 8+C_n^2\cdot 8^2+C_n^3\cdot 8^3+\cdots C_n^n 8^n-1=8C_n^1+8^2(C_n^2+8C_n^3+\cdots+8^{n-2}C_n^n)$,

$\therefore$ 正整数 n 的最小值为 8.(12 分)

18.(1)取 BP 中点 M,连接 AM、CM,易知 $AM\perp BP$ 且 $CM\perp BP$,因此 $BP\perp$ 平面 ACM,

$\because BP\subset$ 平面 ABP,$\therefore$ 平面 $ACM\perp$ 平面 ABP,

$\because$ 平面 $ACM\cap$ 平面 $ABP=AM$,

$\therefore$ 直线 AC 在平面 ABP 的射影在直线 AM 上,

$\therefore \angle CAM=\frac{\pi}{4}$.(1 分)

$\because AM=CM=\sqrt{3}$,余选定理可得 $AC=\sqrt{6}$,

$\because AC^2=AM^2+CM^2$,$\therefore AM\perp CM$,

$\because CM\perp BP$,$\therefore CM\perp$ 平面 $ABED$,

$\because PE\subset$ 平面 $ABED$,$\therefore CM\perp PE$,(3 分)

$\because BP=2$,在 $\triangle PDE$ 中,$PD=ED=2$,$\angle PDE=\frac{2}{3}\pi$,

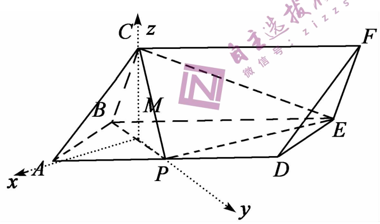
$\therefore PE=2\sqrt{3}$,

又 $BE=4$,

$\therefore BP^2+PE^2=BE^2$,即 $PE\perp BP$,(5 分)

$\therefore EP\perp$ 平面 BCP.(6 分)

(2)由(1)可知 MP、MC、MA 两两垂直,以 M 为原点,MA 所在直线为 x 轴,MP 所在直线为 y 轴.MC 所在直线为 z 轴建立空间直角坐标系,



$\therefore C(0,0,\sqrt{3})$,$P(0,1,0)$,$D(-\sqrt{3},2,0)$,$E(-2\sqrt{3},1,0)$,设平面 ECP 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{PC}=0\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{PE}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-y_1+\sqrt{3}z_1=0\\ -2\sqrt{3}x_1=0\end{cases}$,

令 $y_1=\sqrt{3}$ 得 $\boldsymbol{n}_1=(0,\sqrt{3},1)$,(8 分)

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{PC}=0\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{PD}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-y_2+\sqrt{3}z_2=0\\ y_2-\sqrt{3}x_2=0\end{cases}$,

令 $y_2=\sqrt{3}$ 得 $\boldsymbol{n}_2=(1,\sqrt{3},1)$,(10 分)

$\therefore$ 平面 ECP 与平面 PCD 夹角的余弦值为 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{4}{2\times\sqrt{5}}=\frac{2}{5}\sqrt{5}$.(12 分)

19.(1)甲队参加两场比赛后积分 X 的取值分别为 0,1,2,3,4,6.

$\therefore$ 随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4	6
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

(4 分)

随机变量 X 的数学期望:$E(X)=0\times\frac{1}{16}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{8}+4\times\frac{1}{4}+6\times\frac{1}{16}=\frac{5}{2}$.(6 分)

(2)小组结束后,四支球队积分相等有两种情况:6 场比赛都出现平局或每支球队 3 场比赛均为 1 平 1 胜 1 负.(7 分)

①6 场比赛均出现平局,其概率为 $P_1=\frac{1}{2^6}$,(8 分)

②每支球队均 1 胜 1 平 1 负的概率为 $P_2=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 6=\frac{3}{2^9}$.(10 分)

$\therefore$ 四支球队积分相同的概率为 $P=P_1+P_2=\frac{11}{512}$.(12 分)

20.(1)由题意,AB 斜率不为零,

设 AB:$x=\lambda y+\frac{p}{2}$ 代入 $y^2=2px(p>0)$.

$\therefore y^2-2p\lambda y-p^2=0$

设 $A(x_1,y_1)B(x_2,y_2)$,

则 $y_1+y_2=2p\lambda$,$y_1y_2=-p^2$,(2 分)

$S_{\triangle HAB}=\frac{1}{2}p|y_1-y_2|=\frac{1}{2}p\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$=p^2\sqrt{\lambda^2+1}$.(4 分)

$\therefore$ 当 $\lambda=0$ 时,$S_{\triangle HAB}$ 取最小值 p^2,

$\therefore p^2=4$,$\therefore p=2$,

抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$.(5 分)

(2)假设存在 $E(x_0,y_0)$.

设 $M(x_3,y_3)$,$N(x_4,y_4)$,由题意 MN 的斜率不为零,设 MN 的方程为 $x=t(y-1)+\frac{17}{4}$ 代入 $y^2=4x$ 可得 $y^2-4ty+4t-17=0$

$\therefore y_3+y_4=4t$,$y_3y_4=4t-17$.(7 分)

$\therefore \frac{y_0-y_3}{x_0-x_3}\cdot\frac{y_0-y_4}{x_0-x_4}=1$

$\therefore \frac{4}{y_0+y_3}\cdot\frac{4}{y_0+y_4}=-1$,(8 分)

$\therefore y_0^2+(y_3+y_4)y_0+y_3y_4+16=0$

即 $4t(y_0+1)+y_0^2-1=0$,(10 分)

$\therefore \begin{cases}y_0+1=0\\ y_0^2-1=0\end{cases}$,解得 $y_0=-1$

故存在定点 $E(\frac{1}{4},-1)$ 满足题意.(12 分)

21.(1)$f(x)$ 定义域为 $[0,+\infty)$,

当 $n=0$ 时,$f(x)=e^{x+1}-m\sqrt{x}$,$f'(x)=e^{x+1}-\frac{m}{2\sqrt{x}}$,(1 分)

当 $m\leqslant 0$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递增,

$\therefore f(x)\geqslant f(0)=e$.

此时 $f(x)$ 无零点,即 $f(x)$ 的零点个数为 0.(2 分)

$\therefore$ 当 $m>0$ 时,令 $g(x)=e^{x+1}-\frac{m}{2\sqrt{x}}$,

则 $g'(x)=e^{x+1}+\frac{m}{4x^{\frac{3}{2}}}>0$

$\therefore g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 为增函数,

又 $x\to 0$ 时,$g(x)\to-\infty$,$x\to+\infty$ 时,$g(x)\to+\infty$

$\therefore$ 存在 $x_0\in(0,+\infty)$,使得 $g(x_0)=0$,

即 $e^{x_0+1}-\frac{m}{2\sqrt{x_0}}=0$,$m=2e^{x_0+1}\sqrt{x_0}$

当 $x\in(0,x_0)$ 时,$g(x)<0$,即 $f'(x)<0$,

$\therefore f(x)$ 单调递减,

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时,$g(x)>0$,即 $f'(x)>0$,

$\therefore f(x)$单调递增，

$\therefore f(x)_{\min}=f(x_0)=e^{x_0+1}-mx_0^{\frac{1}{2}}=e^{x_0+1}-2x_0e^{x_0+1}$

$=e^{x_0+1}(1-2x_0)$，

当 $1-2x_0=0$，即 $x_0=\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)_{\min}=f(x_0)=0$，此时 $m=\sqrt{2e^3}$，$f(x)$有 1 个零点，(3 分)

当 $1-2x_0<0$，即 $x_0>\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)_{\min}=f(x_0)<0$，$m>\sqrt{2e^3}$，

又 $f(0)=e>0$，$x\to+\infty$时，$g(x)\to+\infty$，

$\therefore f(x)$在$(0,x_0)$和$(x_0,+\infty)$上各有一个零点，即 $f(x)$有 2 个零点；(4 分)

当 $1-2x_0>0$，即 $0<x_0<\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)_{\min}=f(x_0)>0$，此时 $0<m<\sqrt{2e^3}$，$f(x)$无零点，即 $f(x)$有 0 个零点；(5 分)

综上所述，当 $m<\sqrt{2e^3}$ 时，$f(x)$有 0 个零点；

当 $m=\sqrt{2e^3}$ 时，$f(x)$有 1 个零点；

当 $m>\sqrt{2e^3}$ 时，$f(x)$有 2 个零点.(6 分)

(2)$\because$函数 $f(x)$有零点，设 x_1 为函数 $f(x)$的一个零点，即 $f(x_1)=0$，由(1)知 $x_1>0$，

$\therefore e^{x_1+1}-m\sqrt{x_1}+n\sin x_1=0$，即 $e^{x_1+1}=m\sqrt{x_1}-n\sin x_1$，

$\therefore (e^{x_1+1})^2=(m\sqrt{x_1}-n\sin x_1)^2\leqslant(|m|\sqrt{x_1}+|n||\sin x_1|)^2$，(7 分)

令 $h(x)=x-\sin x(x>0)$，$\therefore h'(x)=1-\cos x\geqslant0$，

$\therefore h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

$\therefore h(x)>h(0)=0$，即 $x>\sin x$.

当 $x\in(0,1]$时，$|\sin x|=\sin x<x$；

$x\in(1,+\infty)$时，$|\sin x|\leqslant1<x$，故都有$|\sin x|<x$，(8 分)

又$\because \sin x\in[0,1]$，故 $\sin^2x\leqslant|\sin x|<x$，故$|\sin x|<\sqrt{x}$

$\therefore (|m|\sqrt{x_1}+|n||\sin x_1|)^2<(|m|\sqrt{x_1}+|n|\sqrt{x_1})^2=(|m|+|n|)^2x_1\leqslant2(m^2+n^2)x_1$，(9 分)

$\therefore m^2+n^2>\dfrac{e^{2x_1+2}}{2x_1}=e^2\cdot\dfrac{e^{2x_1}}{2x_1}$，(10 分)

令 $p(x)=\dfrac{e^{2x}}{2x}(x>0)$，

$\therefore p'(x)=\dfrac{2e^{2x}\cdot2x-2e^{2x}}{4x^2}=\dfrac{e^{2x}\cdot(2x-1)}{2x^2}$，

令 $p'(x)=0$ 是 $x=\dfrac{1}{2}$，

当 $x\in(0,\dfrac{1}{2})$时，$p'(x)<0$，$p(x)$单调递减，

当 $x\in(\dfrac{1}{2},+\infty)$时，$p'(x)>0$，$p(x)$单调递增，

$\therefore p(x)\geqslant p(x)_{\min}=p(\dfrac{1}{2})=e$，$\therefore\dfrac{e^{2x}}{2x}\geqslant e$，(11 分)

$\therefore e^2\cdot\dfrac{e^{2x_1}}{2x_1}\geqslant e^2\cdot e=e^3$，$\therefore m^2+n^2>e^3$.(12 分)

22.(1)由 $O_1(1,\dfrac{\pi}{2})$，$\angle MOO_1=\dfrac{\pi}{6}$，

可得点 M 的极角为$\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2\pi}{3}$.

在等腰$\triangle O_1MO$ 中，

由正弦定理得$\dfrac{|O_1M|}{\sin\angle MOO_1}=\dfrac{|OM|}{\sin\angle MO_1O}$，

即$\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}=\dfrac{|OM|}{\sin\frac{2\pi}{3}}$.

$\therefore |OM|=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，

$\therefore$点 M 的极坐标为$(\sqrt{3},\dfrac{2\pi}{3})$.(5 分)

(2)由题意，在直角坐标系中，点 M 在以$(0,1)$为圆心，1 为半径的半圆弧 C_1 上，

其参数方程为$\begin{cases}x=\cos\theta,\\y=1+\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数，且$\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{3\pi}{2}$).

设线段 MO_2 的中点 N 的坐标为(x,y)，

又由点 $M(\cos\theta,1+\sin\theta)$，$O_2(0,-1)$，

根据中点坐标公式可得$\begin{cases}x=\dfrac{0+\cos\theta}{2}=\dfrac{1}{2}\cos\theta\\y=\dfrac{-1+1+\sin\theta}{2}=\dfrac{1}{2}\sin\theta\end{cases}$，

$\therefore$点 N 的轨迹方程为$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\cos\theta\\y=\dfrac{1}{2}\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数，且$\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{3\pi}{2}$).

(10 分)

23.(1)$f(x)=|x+5|+2|x+2|=\begin{cases}-3x-9,x\leqslant-5\\-x+1,-5<x<-2\\3x+9,x\geqslant-2\end{cases}$

当 $x\leqslant-5$ 时，$f(x)\geqslant6$；当$-5<x<-2$ 时，$3<f(x)<6$；

当 $x\geqslant-2$ 时，$f(x)\geqslant3$，

$\therefore$当 $x=-2$ 时，$f(x)$取最小值 $t=3$.(5 分)

(2)由(1)可知$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{3c}=2$，

$\because a,b,c$ 为正实数，

$\dfrac{a}{9}+\dfrac{2b}{9}+\dfrac{c}{3}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{3c})(\dfrac{a}{9}+\dfrac{2b}{9}+\dfrac{c}{3})$

$=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{3}+(\dfrac{a}{18b}+\dfrac{2b}{9a})+(\dfrac{c}{3a}+\dfrac{a}{27c})+(\dfrac{2b}{27c}+\dfrac{c}{6b})\right]$

$\geqslant\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{9}+\dfrac{2}{9}+\dfrac{2}{9})=\dfrac{1}{2}$.

当且仅当 $a=2b=3c$，即 $a=\dfrac{3}{2}$，$b=\dfrac{3}{4}$，$c=\dfrac{1}{2}$时取等号，

$\therefore\dfrac{a}{9}+\dfrac{2b}{9}+\dfrac{c}{3}\geqslant\dfrac{1}{2}$.(10 分)