上饶市 2022—2023 学年度下学期期末教学质量测试

数学试卷参考答案及评分标准

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

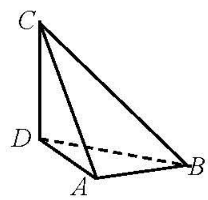
题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	D	A	B	B	A	C	D

1．解：因为$a+2i$与$1+bi$互为共轭复数，所以$a=1,b=-2$，所以$a-b=3$．故选 C.

2．解：由已知得，$\cos\alpha=\dfrac{-3}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}=-\dfrac{3}{5}$．故选 D.

3．解：根据线面垂直的性质可知 A 正确．故选 A.

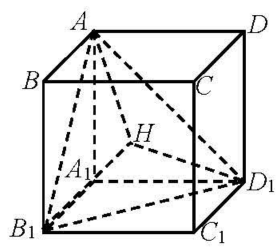
4．解：因为$\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$，$\therefore\left(\sin\alpha+\cos\alpha\right)^2=\dfrac{9}{5}$，即
$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=\dfrac{9}{5}$，$\therefore\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{2}{5}$，$\therefore$
$\tan\alpha+\dfrac{1}{\tan\alpha}=\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{5}{2}$．故选 B.



5．解：设$CD=x$，在ΔACD中，$\angle CDA=90°,\angle CAD=45°$，则$AD=x$，在$\triangle BCD$中，$\angle CDB=90°,\angle CBD=30°$，则$BD=\sqrt{3}x$，因为$\angle ADB=30°$，所以由余弦定理得：
$x^2+3x^2-2x\cdot\sqrt{3}x\cos30°=17^2$，整理得：$x^2=17^2$，解得$x=17$．故选 B.

6．解：由图象可得，$f(x)=\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})$，可知 A 正确．故选 A.

(亦可不求解析式直接根据周期性及对称中心和对称轴的特征看图直选).



7．解：点N形成图形是棱CB、CC_1、CD在平面AB_1D_1上的射影线段构成的，由于平行线段在同一平面内的射影长度是相等的，所以CB、CC_1、CD在平面AB_1D_1上的射影线段长度分别等于棱D_1A_1、AA_1、B_1A_1在平面AB_1D_1上的射影线段长度．$\because$正方体$ABCD$—$A_1B_1C_1D_1$棱长为$\sqrt{2}$，$\therefore\Delta AB_1D_1$是边

长为 2 的等边三角形，$\therefore HA+HB_1+HD_1=3\times\frac{2}{3}\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ (H 是 ΔAB_1D_1 的中心)．故选 C．

8．解：由余弦函数的性质可知，当 $f(x)$ 在 $[\alpha,\alpha+\frac{\pi}{6}]$ 上单调时，

$\begin{cases}2\alpha-\frac{\pi}{6}\geq k\pi\\2\alpha+\frac{\pi}{6}\leq k\pi+\pi\end{cases}(k\in Z)$，得 $\alpha\in[\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12},\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{12}],k\in Z$，则

$\omega\alpha\in[(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12})\omega,(\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{12})\omega],k\in Z$，

由于选项中 ω 取 $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，1，2，其区间端点的前缀分别是 $\frac{k\pi}{8}$，$\frac{k\pi}{4}$，$\frac{k\pi}{2}$，$k\pi$，区间角的终边呈周期性变化，因此只需考虑存在 $k\in Z$，使得 $\frac{\pi}{2}\in[(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12})\omega,(\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{12})\omega],k\in Z$，则 k 取非负整数，且 $\omega\in[\frac{6}{6k+5},\frac{6}{6k+1}],k\in Z$，$\omega$ 的取值区间是 $[\frac{6}{5},6]\cup[\frac{6}{11},\frac{6}{7}]\cup[\frac{6}{17},\frac{6}{13}]\cup[\frac{6}{23},\frac{6}{19}]\cup[\frac{6}{29},\frac{6}{25}]\cup\cdots$，选项中只有 $\omega=2$ 适合，故选 D．

备注：①本题亦可采用逐个检验法；②解答中所求出的 ω 的取值范围并非 ω 的全部取值．

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求.全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错的得 0 分.

题号	9	10	11	12
答案	ACD	BCD	CD	ACD

9．解：由复数的有关概念可知，ACD 正确.故选 ACD.

10．解：显然 A 错误，B 正确；平面 BDP 与平面 BDC_1 是同一个平面，C 正确；三棱锥 $A-D_1PC$ 换底成三棱锥 $P-AD_1C$，则底面积为定值，而因为 $BC_1\,//$ 平面 AD_1C，可知 P 到平面 AD_1C 的距离也是定值，D 正确.故选 BCD.

11．解：由已知得 $g(x)=2\sin[2(x-m)+\frac{\pi}{3}]$，又函数 $g(x)$ 为偶函数，则 $-2m+\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$，$m=-\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12},k\in Z$，CD 正确，故选 CD.

12．解：$|\vec{b}|=\sqrt{5}|\cos\beta|\in[0,\sqrt{5}]$，A 正确；设 $\overline{OA}=\vec{a},\overline{OB}=\vec{b}$（$O$ 为坐标原点），由于 $|\vec{a}|=1,\vec{b}$ 的坐标满足 $y=2x(x\in[-1,1])$，则点 A 在以 O 为圆心的单位圆上运动，点 B 在线段上运动，由投影数量的几何意义可知其取值范围是 $[-1,1]$，B 错

误；结合$\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|$的几何意义或利用$\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|\le\left|2\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|=2+\sqrt{5}$可知C正确；

$\left|\vec{c}\right|\le\left|x\vec{a}\right|+\left|y\vec{b}\right|\le\left|x\right|+\sqrt{5}\left|y\right|\le2\sqrt{\dfrac{x^2+5y^2}{2}}=2$，D正确．故选ACD.

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13．$4\sqrt{2}$；　14．$\dfrac{3\sqrt{3}+4}{10}$；　15．$\dfrac{9\pi}{2}$；　16．$\dfrac{8\pi}{3}$.

13．解：该平面图形是直角梯形$OABC$，其高为$OC=4\sqrt{2}$.

14．解：由$\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{6})$得，$\alpha+\dfrac{\pi}{12}\in(\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{4})$，$2(\alpha+\dfrac{\pi}{12})\in(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2})$，又

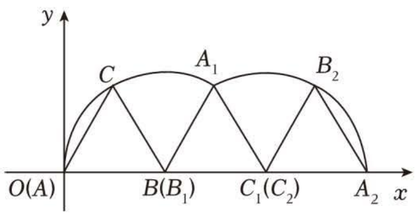
$\because\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{12})=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，则$\cos2(\alpha+\dfrac{\pi}{12})=1-2\sin^2(\alpha+\dfrac{\pi}{12})=\dfrac{3}{5}$，

$\sin2(\alpha+\dfrac{\pi}{12})=\dfrac{4}{5}$，$\cos2\alpha=\cos[2(\alpha+\dfrac{\pi}{12})-\dfrac{\pi}{6}]$

$=\cos2(\alpha+\dfrac{\pi}{12})\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin2(\alpha+\dfrac{\pi}{12})\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}+4}{10}$.

15．解：$CD=1,CC_1=2,BC=2$，四面体AB_1D_1C的外接球与长方体的外接球是同一个球，其半径为$\dfrac{3}{2}$，其体积为$\dfrac{4}{3}\pi(\dfrac{3}{2})^3=\dfrac{9\pi}{2}$.

16．解：顶点A先以2为半径绕点B顺时针旋转$\dfrac{2\pi}{3}$弧度，再以2为半径绕点C顺时针旋转$\dfrac{2\pi}{3}$弧度，其路径长度为$2\times\dfrac{2\pi}{3}\times2=\dfrac{8\pi}{3}$.



四、解答题：本题共6小题，共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17．（10分）解：（1）由已知得，$\vec{b}+2\vec{c}=(4,5)$，…………1分

$\because\vec{a}\,//\,(\vec{b}+2\vec{c})$，$\therefore5m=8$，…………4分

$\therefore m=\dfrac{8}{5}$.…………5分

（2）由已知得，$\vec{a}-\vec{b}=(m+2,1)$，$\vec{b}+\vec{c}=(1,3)$，…………6分

$\because(\vec{a}-\vec{b})\perp(\vec{b}+\vec{c})$，$\therefore m+2+3=0$，…………9分

$\therefore m=-5$.…………10分

18.（12 分）解：（1）由$(a-2b)(\cos A\cos B-\sin A\sin B)=c\cos A$得，

$(a-2b)\cos(A+B)=c\cos A$，

$\because A+B+C=\pi$，$\therefore \cos(A+B)=-\cos C$

$\therefore (2b-a)\cos C=c\cos A$ ……………………………………………………2 分

又由正弦定理，得$(2\sin B-\sin A)\cos C=\sin C\cos A$，即

$2\sin B\cos C=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，

$\therefore 2\sin B\cos C=\sin(A+C)$，

$\because A+B+C=\pi$，

$\therefore \sin(A+C)=\sin B$，即$2\sin B\cos C=\sin B$，

$\because 0<B<\pi$，

$\therefore \sin B\neq 0$，

$\therefore \cos C=\frac{1}{2}$，……………………………………………………………5 分

$\because 0<C<\pi$，

$\therefore C=\frac{\pi}{3}$. ……………………………………………………………………6 分

（2）由已知及余弦定理可得，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=4+9-6=7$，

$c=\sqrt{7}$，…………………………………………………………………………8 分

$\because b$ 边为最大边，$\therefore$ 角 B 为最大角，

而 $a^2+c^2>b^2$，$\therefore \Delta ABC$ 为锐角三角形，

$\therefore CD$ 最小时为 AB 边上的高 h_c，……………………………………………10 分

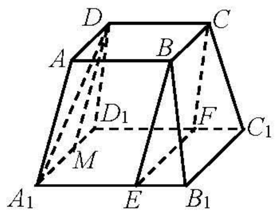
$\because S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ch_c$

$\therefore 6\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{7}h_c$，$h_c=\frac{3\sqrt{21}}{7}$

$\therefore CD$ 的最小值为$\frac{3\sqrt{21}}{7}$. ……………………………………………………12 分

备注：①第（1）小题在$(2b-a)\cos C=c\cos A$基础上亦可化成边的式子求解，同等给分；②**第（2）小题不证 AB 边上的高的垂足在线段 AB 上必须扣 2 分.**

19.（12 分）（1）证明：$\because$ 正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$2A_1B_1=3AB$，A_1B_1 // AB



$\therefore \overrightarrow{AB}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{A_1B_1}$，又 $\because \overrightarrow{A_1E}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{A_1B_1}$

$\therefore \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1E}$，$\therefore$ 四边形 AA_1EB 为平行四边形

$\therefore AA_1$ // BE，又 $\because AA_1 \not\subset$ 平面 $BCFE$，$BE\subset$ 平面 $BCFE$，

$\therefore AA_1$ // 平面 $BCFE$ ……………………………………………………2 分

$\because AD$ // BC，$AD\not\subset$ 平面 $BCFE$，$BC\subset$ 平面 $BCFE$，

$\therefore AD$ // 平面 $BCFE$ ……………………………………………………4 分

又 $\because AA_1\cap AD=A$，$AA_1\subset$ 平面 ADD_1A_1，$AD\subset$ 平面 ADD_1A_1，

$\therefore$ 平面 ADD_1A_1 // 平面 $BCFE$

$\because A_1D\subset$ 平面 ADD_1A_1

$\therefore A_1D$ // 平面 $BCFE$ ……………………………………………………6 分

备注：亦可证 A_1D // EC 或用向量法证明，同等给分.

（2）解：在等腰梯形 ADD_1A_1 中作 DM // AA_1 交 A_1D_1 于点 M，由（1）知，AA_1 // BE，

$\therefore BE$ // DM，

$\therefore \angle MDD_1$ 就是异面直线 DD_1 与 EB 所成的角，……………………………9 分

$\because DD_1=AD=2$，$2A_1D_1=3AD$

$\therefore \Delta MDD_1$ 中，$DM=DD_1=2$，$MD_1=1$，

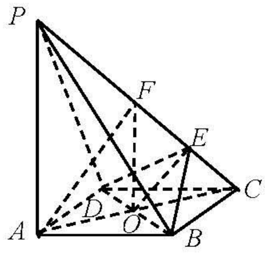
$\therefore \cos\angle MDD_1=\dfrac{DM^2+DD_1^2-MD_1^2}{2DM\cdot DD_1}=\dfrac{7}{8}$，……………………………11 分

$\therefore$ 异面直线 DD_1 与 EB 所成的角的余弦值为 $\dfrac{7}{8}$. ……………………………12 分

备注：由于正棱台的侧面全等，$\angle MDD_1=\angle EBB_1$，所以转化为求 $\angle EBB_1$ 的余弦也是可以的.

20.（12 分）（1）证明：连接 AC 交 BD 于点 O，取 PC 中点 F，连接 OF,OE，

$\because PA\perp$ 平面 $ABCD$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，



$\therefore PA\perp BD$，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\therefore BD\perp AC$，

又 $\because PA\cap AC=A$，PA、$AC\subset$ 平面 PAC，

$\therefore BD\perp$ 平面 PAC，

$\therefore BD\perp PC$ ……………………………………………………………………3 分

$\because AO=OC$，$PF=FC$，

$\therefore OF=\dfrac{1}{2}PA=\sqrt{3}$，

$\because AB=AD=2$，$\angle BAD=60°$，$\therefore CO=AO=\sqrt{3}$

$\because PE=\dfrac{3}{4}PC$ 且 F 为 PC 中点，$\therefore E$ 为 FC 中点，

又 $\because CO=FO$，

$\therefore OE\perp PC$ ……………………………………………………………………6 分

$\because OE$、$BD\subset$ 平面 BDE，$OE\cap BD=O$，

$\therefore PC\perp$ 平面 BDE；……………………………………………………………7 分

备注：本小题如果通过三角形中的计算去证明 $PC\perp EB$，$PC\perp ED$ 也是可以的，同等给分．

（2）$V_{E-PBD}=\dfrac{3}{4}V_{C-PBD}=\dfrac{3}{4}V_{P-BCD}=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{3}\times PA\times S_{\triangle BCD}=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{3}\times 2\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}=\dfrac{3}{2}$

……………………………………………………………………………………12 分

21.（12 分）解：（1）由已知可得 $\angle AOx=\dfrac{\pi}{6}$，

$\because$ 盛水筒运动的角速度 $\omega=\dfrac{2\pi}{60}=\dfrac{\pi}{30}$，

$\therefore t$ 秒后盛水筒转过的角度为 $\dfrac{\pi}{30}t$，

此时可得以 OP 为终边的角 $\dfrac{\pi}{30}t-\dfrac{\pi}{6}$

$\therefore f(t)=4\sin(\dfrac{\pi}{30}t-\dfrac{\pi}{6})+2,(t\in[0,+\infty))$ ………5 分

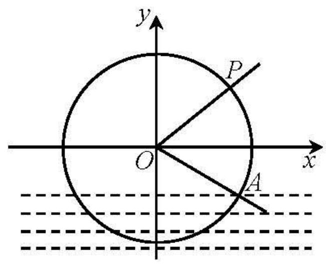


图 2

备注：**未写出定义域扣 1 分.**

（2）当第一筒水到达最高位置时，是第一次取得最大值，此时 $\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，得 $t=20$（秒），……………………………………………………………7 分

相邻两个盛水筒倾倒的时间差为 $\frac{2\pi}{12}\div\frac{\pi}{30}=5$（秒），…………………9 分

（3）完成该稻田的浇灌需倾倒 $\frac{100}{0.01}=10000$ 筒水，所需时间为 $20+(10000-1)\times 5=50015$ 秒，约为 13.9 小时．…………………………11 分

答：第一筒水倾倒的时刻 t 为 20 秒，相邻两个盛水筒倾倒的时间差为 5 秒，约 13.9 小时可完成该稻田的浇灌．…………………………………………………12 分

22．（12 分）解：（1）$f(x)=\sqrt{2}\sin x\cos x-\sqrt{2}\cos^2 x+\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\cos 2x)+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin(2x-\frac{\pi}{4})$ ……………………………2 分

令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in Z)$，得 $-\frac{\pi}{8}+k\pi\le x\le\frac{3\pi}{8}+k\pi(k\in Z)$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{\pi}{8}+k\pi,\frac{3\pi}{8}+k\pi](k\in Z)$．……………3 分

（2）$g(x)=f(x)+f(x+\frac{\pi}{4})-f(x)\cdot f(x+\frac{\pi}{4})$

$=\sin(2x-\frac{\pi}{4})+\cos(2x-\frac{\pi}{4})-\sin(2x-\frac{\pi}{4})\cos(2x-\frac{\pi}{4})$

令 $\sin(2x-\frac{\pi}{4})+\cos(2x-\frac{\pi}{4})=t(t=\sqrt{2}\sin 2x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}])$，则

$\sin(2x-\frac{\pi}{4})\cos(2x-\frac{\pi}{4})=\frac{t^2-1}{2}$，

$g(x)=h(t)=-\frac{1}{2}t^2+t+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(t-1)^2+1$，……………………………5 分

可得，当 $t=1$ 即 $\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$g(x)_{\max}=1$；当 $t=-\sqrt{2}$ 即 $\sin 2x=-1$ 时，$g(x)_{\min}=-\sqrt{2}-\frac{1}{2}$．

$\because$ 存在 $x_1,x_2\in R$，对任意 $x\in R$，有 $g(x_1)\le g(x)\le g(x_2)$ 恒成立，

$\therefore g(x_1)$ 为 $g(x)$ 的最小值，$g(x_2)$ 为 $g(x)$ 的最大值，

$\therefore \sin 2x_1=-1$，$\sin 2x_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore |2x_1-2x_2|_{\min}=\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}$，

$\therefore |x_1-x_2|_{\min}=\dfrac{3\pi}{8}$． ……………………………………………………………7 分

备注：本小题化 $g(x)$ 为 $g(x)=-\sin^2 2x+\sqrt{2}\sin 2x+\dfrac{1}{2}$ 再换元亦可，同等给分．

（3）令 $F(x)=-f^2(x+\dfrac{\pi}{8})+a[f(x+\dfrac{\pi}{8})+2]-3=0$，方程可化为

$a=\dfrac{\sin^2 2x+3}{\sin 2x+2}=\dfrac{(\sin^2 2x-4)+7}{\sin 2x+2}=(\sin 2x+2)+\dfrac{7}{\sin 2x+2}-4$，

令 $\sin 2x+2=t(t\in[1,3])$，则 $a+4=t+\dfrac{7}{t}(t\in[1,3])$，………………………8 分

当 $a+4=8$ 时，$t=1$，$\sin 2x=-1$，此时函数 $F(x)$ 在 $(0,n\pi)(n\in N_+)$ 上有 n 个零点，$\therefore a=4,n=2023$ 适合题意；

当 $a+4\in(\dfrac{16}{3},\dfrac{11}{2})\cup(\dfrac{11}{2},8)$ 时，t 在 $(1,2)\cup(2,\dfrac{7}{3})$ 内有一解，$\sin 2x$ 在 $(-1,0)$ 或 $(0,\dfrac{1}{3})$ 内有一取值，则此时函数 $F(x)$ 在 $(0,n\pi)(n\in N_+)$ 上有 $2n$ 个零点，不适合题意；

当 $a+4=\dfrac{11}{2}$ 时，$t=2$，$\sin 2x=0$，此时函数 $F(x)$ 在 $(0,n\pi)(n\in N_+)$ 上有 $2n-1$ 个零点，$\therefore a=\dfrac{3}{2},n=1012$ 适合题意；

当 $a+4=\dfrac{16}{3}$ 时，$t=3$ 或 $\dfrac{7}{3}$，$\sin 2x=1$ 或 $\dfrac{1}{3}$，则此时函数 $F(x)$ 在 $(0,n\pi)(n\in N_+)$ 上有 $3n$ 个零点，不适合题意；

当 $a+4\in(2\sqrt{7},\dfrac{16}{3})$ 时，t 在 $(\dfrac{7}{3},\sqrt{7})$ 和 $(\sqrt{7},3)$ 内各有一解，$\sin 2x$ 在 $(\dfrac{1}{3},\sqrt{7}-2)$ 和 $(\sqrt{7}-2,1)$ 内各有一取值，则此时函数 $F(x)$ 在 $(0,n\pi)(n\in N_+)$ 上有 $4n$ 个零点，不适合题意；

当 $a+4=2\sqrt{7}$ 时，$t=\sqrt{7}$，$\sin 2x=\sqrt{7}-2$，则此时函数 $F(x)$ 在 $(0,n\pi)(n\in N_+)$ 上有 $2n$ 个零点，不适合题意．……………………………………11 分

综上所述，$a=4,n=2023$，或 $a=\dfrac{3}{2},n=1012$．………………………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。