

# 2023 年 8 月入学考试 数 学

考试范围：全部范围；考试时间：120 分钟；命题人：曾治霖

注意事项：

1. 答题前填写好自己的班级、姓名、考号等信息
2. 请将正确答案填写在答题卡上

## 第 I 卷 选择题

### 一、单选题（共 8 小题）

1. (5 分) 复数  $z$  满足  $\bar{z} \cdot (i+3) = 2-i^5$  ( $i$  为虚数单位), 则  $z$  的虚部是( )

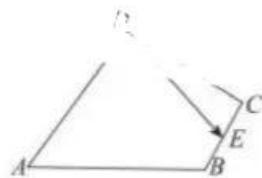
- A.  $\frac{1}{2}$     B.  $-\frac{1}{2}$     C.  $-\frac{1}{2}i$     D.  $\frac{1}{2}i$

2. (5 分) 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_2=1$ ,  $a_3=6$ , 且数列  $\{a_n+n\}$  为等比数列, 则  $a_4$  的值为( )

- A. 23    B. 32    C. 36    D. 40

3. (5 分) 在如图所示的四边形  $ABCD$  中,  $AD \parallel BC$ ,  $AD=2BC$ , 点  $E$  为边  $BC$  的中点, 则向量  $\overrightarrow{DE}$  可以表示为 ( )

- A.  $-\frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$     B.  $-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$   
C.  $\frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$     D.  $\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$



4. (5 分) 中国古典乐器一般按“八音”分类, 这是我国最早按乐器的制造材料来对乐器进行分类的方法, 最早见于《周礼·春官·大师》, 分为“金、石、土、革、丝、木、匏、竹”八类. 其中“金、石、木、革”为打击乐器, “土、匏、竹”为吹奏乐器, “丝”为弹拨乐器, 现从“金、石、土、革、丝、木”中任取“两音”, 则“两音”同为打击乐器的概率为( )

- A.  $\frac{1}{5}$     B.  $\frac{2}{5}$     C.  $\frac{3}{5}$     D.  $\frac{2}{7}$

5. (5分)现订制一个容积为  $V$  的圆柱形铁桶,桶底和桶身用铁皮制作,桶盖用铝合金板制作.已知单位面积铝合金板的价格是铁皮的3倍,当总造价最少时(不计接头部分),桶高应为( )

- A.  $\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$     B.  $\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{2V}{\pi}}$     C.  $2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$     D.  $2\sqrt[3]{\frac{2V}{\pi}}$

6. (5分)已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左焦点为  $F$ , 右顶点为  $A$ , 点  $B$  在椭圆上, 且  $BF \perp x$  轴, 直线  $AB$  交  $y$  轴于点  $P$ , 若  $\vec{AP} = 2\vec{PB}$ , 则椭圆的离心率是( )

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$     B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$     C.  $\frac{1}{3}$     D.  $\frac{1}{2}$

7. (5分)已知三条直线  $l_1: 2x - 3y + 1 = 0$ ,  $l_2: 4x + 3y + 5 = 0$ ,  $l_3: mx - y - 1 = 0$  不能构成三角形, 则实数  $m$  的取值集合为( )

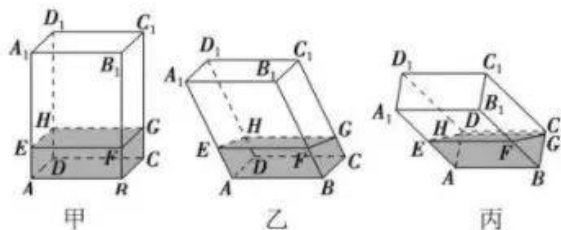
- A.  $\{-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\}$     B.  $\{\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\}$     C.  $\{-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\}$     D.  $\{-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\}$

8. (5分)已知双曲线  $C: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$  的左焦点为  $F$ , 过原点的直线  $l$  与双曲线  $C$  的左、右两支分别交于  $A, B$  两点, 则  $\frac{1}{|FA|} - \frac{4}{|FB|}$  的取值范围是( )

- A.  $[-\frac{1}{6}, \frac{3}{7})$     B.  $[-\frac{1}{6}, \frac{3}{7}]$     C.  $[-\frac{1}{6}, 0)$     D.  $[-\frac{1}{6}, -\infty)$

## 二、多选题 (共4小题)

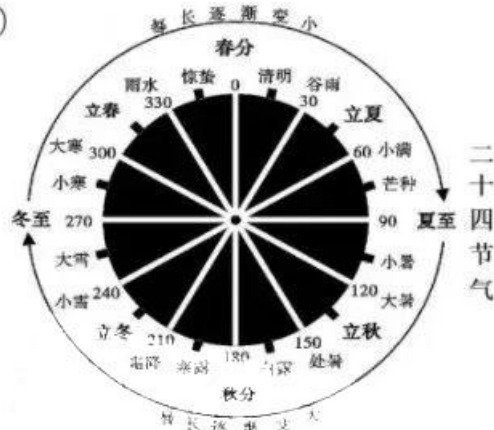
9. (5分)如图,透明塑料制成的长方体容器  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  内灌进一些水,固定容器一边  $AB$  于地面上,再将容器倾斜,随着倾斜程度的不同,有下面几个结论,其中正确的是( )



- A. 没有水的部分始终呈棱柱形

- B. 水面  $EFGH$  所在四边形的面积为定值
- C. 随着容器倾斜程度的不同,  $A_1C_1$  始终与水面所在平面平行
- D. 当容器倾斜如图丙所示时,  $AE \cdot AH$  为定值

10. (5分)我国天文学和数学著作《周髀算经》中记载:一年有二十四个节气,每个节气的晷长损益相同(晷是按照日影测定时刻的仪器,晷长即为所测量影子的长度),二十四节气及晷长变化如图所示,相邻两个节气晷长减少或增加的量相同,周而复始,已知每年冬至的晷长为一丈三尺五寸,夏至的晷长为二尺五寸(一丈等于十尺,一尺等于十寸),则下列说法正确的是( )

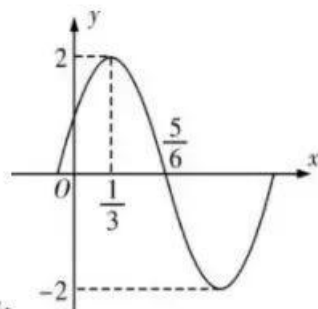


- A. 小寒比大寒的晷长长一尺
- B. 春分和秋分两个节气的晷长相同
- C. 小雪的晷长为一丈五寸
- D. 立春的晷长比立秋的晷长长

11. (5分)已知函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ,  $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$  的部分图象如图所示, 则下列说法正确的是

( )

- A.  $f(x)$  的最小正周期为 2
- B.  $f(x)$  的图象关于点  $(-\frac{1}{6}, 0)$  对称
- C.  $f(x)$  的图象关于直线  $x = \frac{4}{3}$  对称
- D. 把  $f(x)$  的图象向右平移  $\frac{2}{3}$  个单位长度, 得到一个奇函数的图象



的图象

12. (5分)已知函数  $f(x) = \frac{e^x}{x^2 - x + 1}$ , 则下列结论正确的是 ( )

- A. 函数  $f(x)$  存在极大值和极小值

- B. 函数 $f(x)$ 不存在最小值与最大值
- C. 当 $x \in [0, 3]$ 时, 函数 $f(x)$ 的最大值为 $e$
- D. 当 $x \in \left[\frac{1}{2}, e\right]$ 时, 函数 $f(x)$ 的最小值为 $\frac{e^2}{3}$

## 第 II 卷 非选择题

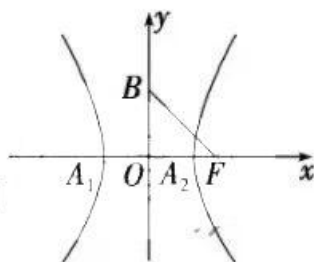
### 三、填空题 (共 4 小题)

13. (5 分) 已知函数  $f(x) = x$ ,  $g(x) = e^x$ , 若  $f'(x_1) = g(x_2)$ , 则  $|x_1 - x_2|$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

14. (5 分) 现有 5 根竹竿, 它们的长度(单位:m)分别为 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9. 若从中一次性随机抽取 2 根竹竿, 则它们的长度恰好相差 0.3 m 的概率为 \_\_\_\_\_.

15. (5 分) 已知  $\tan x = 2$ , 则  $\frac{\sin \alpha + 2 \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} =$  \_\_\_\_\_,  $\frac{1}{\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha - 2 \cos^2 \alpha} =$  \_\_\_\_\_.

16. (5 分) 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  中,  $A_1, A_2$  是左、右顶点,  $F$  是右焦点,  $B$  是虚轴的上端点. 若在线段  $BF$  上(不含端点)存在不同的两点  $P_i (i=1, 2)$ , 使得  $\overrightarrow{P_i A_1} \cdot \overrightarrow{P_i A_2} = 0$ , 则双曲线离心率的取值范围是 \_\_\_\_\_.



## 第 II 卷 非选择题

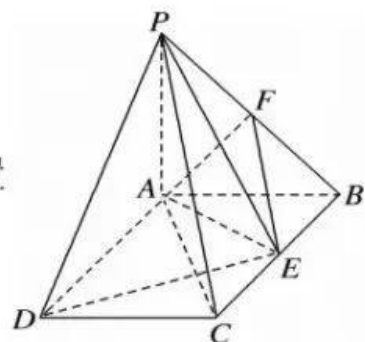
### 四、解答题 (共 6 小题)

17. (10 分) 已知  $\frac{1}{|\sin \alpha|} = -\frac{1}{\sin \alpha}$ , 且  $\lg(\cos \alpha)$  有意义.

(1) 试判断角  $\alpha$  所在的象限;

(2) 若角  $\alpha$  的终边上一点  $M\left(\frac{3}{5}, m\right)$ , 且  $OM=1$  ( $O$  为坐标原点), 求  $m$  及  $\sin \alpha$  的值.

18. (12分)如图,  $PA \perp$  平面  $ABCD$ , 四边形  $ABCD$  是矩形,  $PA=AB=1$ ,  $AD=\sqrt{3}$ ,  $F$  是  $PB$  的中点, 点  $E$  在边  $BC$  上移动.



- (1)求三棱锥  $E-PAD$  的体积;
- (2)当  $E$  为  $BC$  的中点时, 试判断  $EF$  与平面  $PAC$  的位置关系, 并说明理由;
- (3)证明: 无论点  $E$  在边  $BC$  的何处, 都有  $PE \perp AF$ .

19. (12分)甲、乙、丙三个盒中分别装有大小、形状相同的卡片若干, 甲盒中装有2张卡片, 分别写有字母A和B; 乙盒中装有3张卡片, 分别写有字母C, D和E; 丙盒中装有2张卡片, 分别写有字母H和I. 现要从3个盒中各随机取出1张卡片, 求:

- (1)取出的3张卡片中恰好有1张, 2张, 3张写有元音字母的概率分别是多少?



- (2)取出的3张卡片上全是辅音字母的概率是多少?

20. (12分)已知: 函数  $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

- (1)求证: 函数  $f(x)$  的图象关于点  $A(1, \frac{4}{3})$  中心对称, 并求  $f(-2021) + f(-2020) + \dots + f(0) + f(1) + \dots + f(2023)$  的值;

- (2)设  $g(x) = f'(x)$ ,  $a_{n+1} = g(a_n)$ ,  $n \in \mathbf{N}^+$  且  $1 < a_1 < 2$ . 请用数学归纳法证明: 当  $n \geq 2$  时,  $1 < a_n < \frac{3}{2}$ .

21. (12分) 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项积  $T_n$  满足条件:

①  $\left\{\frac{1}{T_n}\right\}$  是首项为 2 的等差数列; ②  $T_2 - T_5 = \frac{1}{6}$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 设数列  $\{b_n\}$  满足  $b_n = \sqrt{\frac{n}{n+2}} - a_n$ , 其前  $n$  项和为  $S_n$ .

求证: 对任意正整数  $n$ , 都有  $0 < S_n < \frac{1}{4}$ .

22. (12分) 已知  $A, B$  为椭圆  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  和双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的公共顶点,  $P, Q$  分别为双曲线和椭圆上不同于  $A, B$  的动点, 且满足  $\vec{AP} - \vec{BP} = \lambda(\vec{AQ} - \vec{BQ}) (\lambda \in \mathbf{R}, |\lambda| > 1)$ , 设直线  $AP, BP, AQ, BQ$  的斜率分别为  $k_1, k_2, k_3, k_4$ .

(1) 求证: 点  $P, Q, O$  三点共线;

(2) 当  $a=2, b=\sqrt{3}$  时, 若点  $P, Q$  都在第一象限, 且直线  $PQ$  的斜率为  $\frac{1}{2}$ , 求  $\triangle BPQ$  的面积  $S$ ;

(3) 若  $F_1, F_2$  分别为椭圆和双曲线的右焦点, 且  $QF_1 \parallel PF_2$ , 求  $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2$  的值.



## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 (网址: [www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖

全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线

