

华南师大附中 2023 届高三月考（二）

数学试题

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，满分 150 分，考试用时 120 分钟。

注意事项：

- 答卷前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名和考号等填写在答题卡上，并用铅笔在答题卡上的相应位置填涂。
- 回答第 I 卷时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。
- 回答第 II 卷时，必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答卷各题目指定区域内，不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。

第 I 卷

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

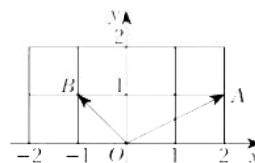
1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 0\}$ ， $B = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 1\}$ ，则 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) =$ ()

A. $(-\infty, 0)$ B. $[-1, 0]$ C. $[0, 1]$ D. $(1, +\infty)$

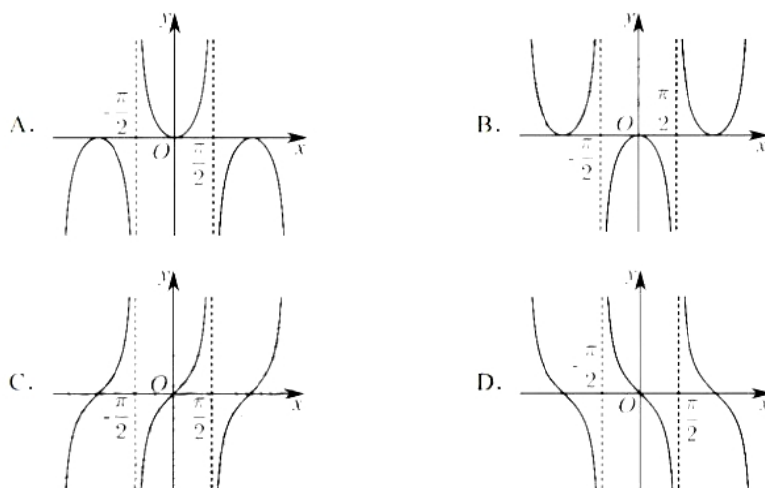
2. 如图，在复平面内，复数 z_1, z_2 对应的向量分别是 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ ，

则 $\frac{z_1}{z_2}$ 对应的点位于 ()

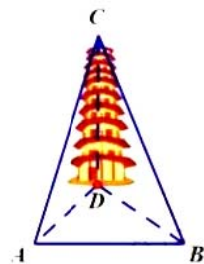
A. 第一象限 B. 第二象限
C. 第三象限 D. 第四象限



3. 函数 $f(x) = \sin x \cdot \tan x$ 的图象大致为 ()



4. 赤岗塔是广州市级文物保护单位，是广州市明代建筑中较具特色的古塔之一，与琶洲塔、莲花塔并称为广州明代三塔，如图，在 A 点测得塔底位于北偏东 60° 方向上的点 D 处，塔顶 C 的仰角为 30° ，在 A 的正东方向且距 D 点 61m 的 B 点测得塔底位于北偏西 45° 方向上（ A, B, D 在同一水平面），则塔的高度 CD 约为（ ）



（参考数据： $\sqrt{6} \approx 2.45$ ）

- A. 40m B. 45m
C. 50m D. 55m

5. 在 $\triangle ABC$ 中， D 为 BC 边上的点，当 $S_{\triangle ABD} = 2S_{\triangle ADC}$ ， $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AD} + y\overrightarrow{AC}$ ，则（ ）

- A. $x=3, y=-2$ B. $x=\frac{3}{2}, y=-\frac{1}{2}$ C. $x=-2, y=3$ D. $x=-\frac{1}{2}, y=\frac{3}{2}$

6. 在 $\triangle ABC$ 中， $c^2 = b\cos A + a\cos B + ab\cos C$ ，则此三角形必是（ ）

- A. 等边三角形 B. 直角三角形
C. 等腰三角形 D. 钝角三角形

7. 设实数 a, b 满足 $b > 0$ ，且 $a + b = 2$ ，则 $\frac{1}{8|a|} + \frac{|a|}{b}$ 的最小值是（ ）

- A. $\frac{9}{8}$ B. $\frac{9}{16}$ C. $\frac{7}{16}$ D. $\frac{1}{4}$

8. 已知函数 $f(x) = 2x - x \ln x$ 的图象上有且仅有两个不同的点关于直线 $y=1$ 的对称点在

$kx + y - 1 = 0$ 的图象上，则实数 k 的取值范围是（ ）

- A. $(-\infty, 1)$ B. $[0, +\infty)$ C. $[0, 1)$ D. $(-\infty, -1)$

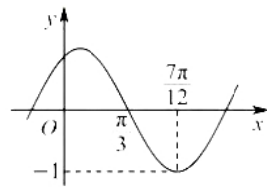
二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

9. 设 m, n 为不同的直线， α, β 为不同的平面，则下列结论中正确的是（ ）

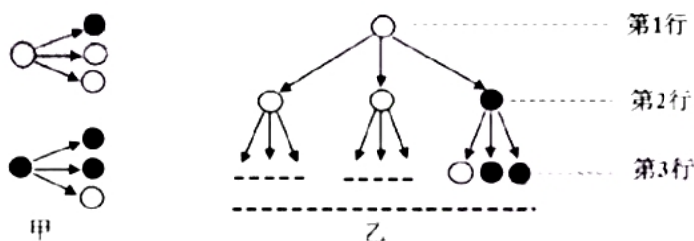
- A. 若 $m \parallel \alpha, n \parallel \alpha$ ，则 $m \parallel n$ B. 若 $m \perp \alpha, n \perp \alpha$ ，则 $m \parallel n$
C. 若 $m \parallel \alpha, m \subset \beta$ ，则 $\alpha \parallel \beta$ D. 若 $m \perp \alpha, n \perp \beta, m \perp n$ ，则 $\alpha \perp \beta$

10. 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示，下列结论中正确的是（ ）

- A. 直线 $x = -\frac{\pi}{6}$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴
B. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, 0)$ ($k \in \mathbb{Z}$) 对称
C. 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{5\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{12} + k\pi]$ ($k \in \mathbb{Z}$)
D. 将函数 $f(x)$ 的图象向由右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位得到函数 $g(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ 的图象



11. 分形几何学是数学家伯努瓦·曼德尔布罗在 20 世纪 70 年代创立的一门新的数学学科，分形几何学不仅让人们感悟到数学与艺术审美的统一，而且还有其深刻的科学方法论意义，按照如图甲所示的分形规律可得如图乙所示的一个树形图：



记图乙中第 n 行白圈的个数为 a_n ，黑圈的个数为 b_n ，则下列结论中正确的是（ ）

- A. $a_1 + a_2 + a_3 = 9$ B. $b_{n+1} = 2b_n + a_n$
C. 当 $k = \pm 1$ 时， $\{a_n + kb_n\}$ 均为等比数列 D. $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_6 = 179$

12. 曲线的曲率就是针对曲线上某个点的切线方向角对弧长的转动率，表明曲线偏离直线的程度，曲率越大，表示曲线的弯曲程度越大，曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x, f(x))$ 处的曲率

$$K(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{1.5}}, \text{ 其中 } f''(x) \text{ 是 } f'(x) \text{ 的导函数，下面说法正确的是 ()}$$

- A. 若函数 $f(x) = x^3$ ，则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(-a, -a^3)$ 与点 (a, a^3) 处的弯曲程度相同
B. 若 $f(x)$ 是二次函数，则曲线 $y = f(x)$ 的曲率在顶点处取得最小值
C. 若函数 $f(x) = \sin x$ ，则函数 $K(x)$ 的值域为 $[0, 1]$
D. 若函数 $f(x) = \frac{1}{x} (x > 0)$ ，则曲线 $y = f(x)$ 上任意一点的曲率的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

第 II 卷

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 夹角为 $\frac{\pi}{4}$ ，且 $|\vec{a}| = 1$ ， $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ ，则 $|2\vec{a} + \vec{b}| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

14. 已知 $\sin\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right) = \frac{1}{3}$ ，则 $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

15. 某学生在研究函数 $f(x) = x^3 - x$ 时，发现该函数的两条性质：①是奇函数；②单调性是先增后减再增，该学生继续深入研究后发现将该函数乘以一个函数 $g(x)$ 后得到一个新函数 $h(x) = g(x)f(x)$ ，此时 $h(x)$ 除具备上述两条性质之外，还具备另一条性质：③ $h'(0) = 0$ ，写出一个符合条件的函数解析式 $g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n + t$ ，数列 $\{b_n\}$ 为公比小于 1 的等比数列，且满足 $b_1 \cdot b_4 = 8$ ，

$b_2 + b_3 = 6$ ，设 $c_n = \frac{a_n + b_n}{2} + \frac{|a_n - b_n|}{2}$ ，在数列 $\{c_n\}$ 中，若 $c_4 \leq c_n (n \in \mathbb{N}^*)$ ，则实数 t 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $\frac{2\cos B + \cos A}{2\sin B - \sin A} = \tan A$.

(1) 求 C ;

(2) 若 $a=6$, $S_{\triangle ABC} = 3\sqrt{3}$, 求 c 的值.

18. (本小题满分 12 分)

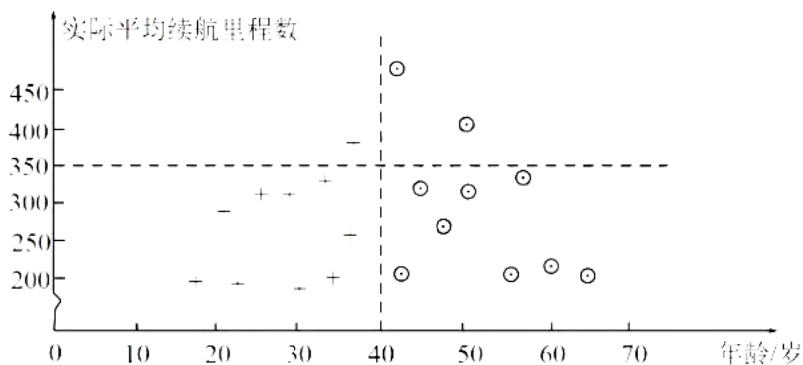
设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $a_1=2$, $a_{n+1}=2S_n+2$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $a_nb_n = \frac{2}{3}n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (本小题满分 12 分)

某汽车生产厂家为了了解某型号电动汽车的“实际平均续航里程数”，收集了使用该型号电动汽车 1 年以上的部分客户的相关数据，得到他们的电动汽车的“实际平均续航里程数”，从年龄在 40 岁以下的客户中抽取 10 位归为 A 组，从年龄在 40 岁及以上的客户中抽取 10 位归为 B 组，将他们的电动汽车的“实际平均续航里程数”整理成下图，其中“+”表示 A 组的客户，“ $\odot$ ”表示 B 组的客户.



注：“实际平均续航里程数”是指电动汽车的行驶总里程与充电次数的比值.

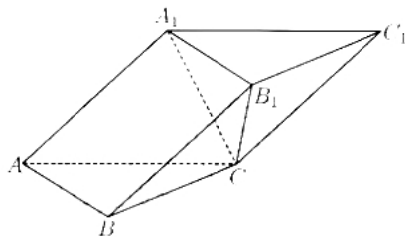
- (1) 记 A, B 两组客户的电动汽车的“实际平均续航里程数”的平均值分别为 m, n , 根据图中数据, 试比较 m, n 的大小 (直接写结论);
- (2) 从抽取的 20 位客户中随机抽取 2 位, 求其中至少有 1 位是 A 组的客户的概率;
- (3) 如果客户的电动汽车的“实际平均续航里程数”不小于 350, 那么称该客户为“驾驶达人”, 现从该市使用这种电动汽车的所有客户中, 随机抽取年龄 40 岁以下和 40 岁以上的客户各 1 位, 记“驾驶达人”的人数为 X , 求随机变量 X 的分布列和数学期望.

20. (本小题满分 12 分)

在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 \perp BC$, $AB=AC=AA_1=A_1C=\sqrt{2}$, $B_1C=\sqrt{6}$.

(1)证明: A_1 在底面 ABC 上的射影是线段 BC 中点;

(2)求平面 A_1BC 与平面 $A_1B_1C_1$ 夹角的余弦值.



21. (本小题满分 12 分)

已知 $A(2,0)$, $B(0,1)$ 是椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个顶点.

(1)求椭圆 E 的标准方程;

(2)过点 $P(2,1)$ 的直线 l 与椭圆 E 交于 C , D 两点, l 与直线 AB 交于点 M , 求 $\frac{|PM|}{|PC|} + \frac{|PM|}{|PD|}$ 的值.

22. (本小题满分 12 分)

设函数 $f(x) = me^{x-1}$, $g(x) = \ln x + n$, m, n 为实数, $F(x) = \frac{g(x)}{x}$ 有最大值为 $\frac{1}{e^2}$.

(1)求 n 的值;

(2)若 $\frac{f(x)}{e^2} > xg(x)$, 求实数 m 的最小整数值.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

