考号＿＿＿＿ 班级＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿

线 〇 订 〇 装 〇 封 〇 密
题 答 要 不 内 线 封 密

2023届高三年级10月份大联考

数学试题

本试卷共4页，22题。全卷满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、考号等填写在试题卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 填空题和解答题的作答：用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、单选题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=(-\infty,-2]\cup[3,+\infty)$，$B=[0,4]$，则 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=$
   A. $[0,3)$　B. $(-2,4]$　C. $(0,3]$　D. $[-2,4)$
2. 若复数 z 满足：$(4+3\mathrm{i})\bar{z}=5(3+\mathrm{i})$，则
   A. $z=1+3\mathrm{i}$　B. $z=3+\mathrm{i}$　C. $z=3-\mathrm{i}$　D. $z=1-3\mathrm{i}$
3. 数学家欧拉在1765年提出定理：三角形的外心、重心、垂心依次位于同一直线上，这条直线后人称之为三角形的欧拉线. 已知△ABC 的顶点 $A(0,0)$，$B(0,2)$，$C(-6,0)$，则其欧拉线的一般式方程为
   A. $3x+y=1$　B. $3x-y=1$　C. $x+3y=0$　D. $x-3y=0$
4. 若 $p:(x+1)(x-2)\leqslant 0$，$q:\dfrac{x-2}{x+2}\leqslant 0$，则 p 为 q 的
   A. 充分必要条件　B. 充分不必要条件
   C. 必要不充分条件　D. 既不充分又不必要条件
5. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率为 $\sqrt{2}$，实轴长为2，实轴的左端点为 A，虚轴的上顶点为 B，C 为右支上任意一点，则△ABC 面积的取值范围为
   A. $\left(\dfrac{1}{4},+\infty\right)$　B. $(\sqrt{2},+\infty)$　C. $(1,+\infty)$　D. $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$
6. 已知 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列，$a_2+a_4=14$，且 a_1,a_2,a_6 成等比数列，若 $a_n=2\,023$，则 $n=$
   A. 568　B. 566　C. 675　D. 696
7. 一批学生分别来自于一班与二班，一班、二班中女生的占比分别为40%，50%. 将这两个班的学生合编成一个大班，从大班中随机抽取1名学生，已知抽取到女生的概率为44%，然后从大班中随机抽取1名学生，若抽取到的是女生，则她来自一班的概率为
   A. $\dfrac{6}{11}$　B. $\dfrac{3}{5}$　C. $\dfrac{2}{5}$　D. $\dfrac{22}{75}$
8. 已知棱长都为3的正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D，E 分别为棱 BB_1，CC_1 上的点，当 $AD+DE+EA$ 取得最小值时，DE 与平面 AA_1C_1C 所成角的正弦值为
   A. $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　B. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　C. $\dfrac{3\sqrt{30}}{20}$　D. $\dfrac{3\sqrt{3}}{20}$

二、多选题：本题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. 新冠肺炎疫情防控中，测量体温是最简便、最快捷，也是筛查成本比较低、性价比很高的筛查方法. 某学校要求学生在开学的第一周连续七天内进行体温自测，已知小张在本周内每天自测一次腋下体温（单位：℃），依次为36.2，36.1，36.6，36.2，36.3，36.3，36.2，则该组数据的
   A. 极差为0.5℃　B. 众数为36.3℃
   C. 中位数为36.2℃　D. 第80百分位数为36.3℃

10. 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域为 R，且 $f(g(x))$ 有意义，$f(x)$ 与 $g(x)$ 都为 R 上单调递增的奇函数，则

A. $f(x)g(x)$ 为偶函数

B. $f(x)g(x)$ 为 R 上的单调递增函数

C. $f(g(x))$ 为奇函数

D. $f(g(x))$ 为 R 上的单调递增函数

11. 已知椭圆 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，椭圆的上顶点和右顶点分别为 A，B. 若 P 为椭圆上任意一点，且 P，Q 关于坐标原点对称，则

A. $|PF_2|+|QF_2|=\sqrt{6}$

B. $\triangle PQB$ 面积的最大值为 $2\sqrt{3}$

C. 四边形 PF_1QF_2 四边的平方和的最小值为 12

D. 椭圆上存在无数个点 M，使得 $\angle F_1MF_2>\frac{\pi}{2}$

12. 以下的真命题是

A. 若 $a>b$，则 $a|c|>b|c|$

B. 若 $a<b<c<0$，$d<e<f<0$，则 $\frac{a}{f}>\frac{b}{e}>\frac{c}{d}$

C. 若 $a<b<c<0$，则 $\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}>\frac{a-c}{b}$

D. 若 $0<a<1$，$0<b<1$，则 $\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}>2\sqrt{ab}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知向量 e_1，e_2 不共线，若 e_1+2e_2 与 $-2e_1+me_2$ 共线，则实数 m 的值为________.

14. 已知 $\theta\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$，且 $\cos 2\theta+2\cos\theta+1=\sin^2\theta$，则 $\cos 2\theta=$________.

15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^x-2e^{-x}-2\sin x+1, & x\geq 0\\ -\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{2}, & x<0\end{cases}$，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是连续的，若 $f[\log_3(x^2-x)]>f(\log_3 2)$，则 x 的取值范围为________.

16. 已知在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PB\perp$ 平面 ABC，$\angle ABC=120°$，且 $BA=BC$，$AC=6$，$PB=4$，则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的体积为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $a_1=2$，$2S_n=n(a_{n+1}-1)$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式及 S_n 的表达式；

(2) 设 $b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，求证：$T_n<\frac{1}{6}$.

18.（本小题满分 12 分）

千百年来，我国劳动人民在生产实践中根据云的形状、走向、速度、厚度、颜色等的变化，总结了丰富的“看云识天气”的经验，并将这些经验编成谚语，如“天上钩钩云，地上雨淋淋”，“日落云里走，雨在半夜后”……．某同学为了验证“天上钩钩云，地上雨淋淋”的现象，在气象局获取了 200 天的天气情况数据，得到如下 2×2 列联表：

天上钩钩云	地上雨淋淋		总计
	下雨	未下雨	
出现	60		100
未出现		70	
总计			

附：

α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

（1）根据所给数据，将上述列联表补充完整，并根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，分析出现“天上钩钩云”与次日的“地上雨淋淋”是否有关．

（2）按分层随机抽样的方式在该地区统计的“地上雨淋淋”中下雨的天数中随机抽取 9 天，再从这 9 天中任意选取 3 天，记其中未出现“天上钩钩云”的天数为 X，求 X 的分布列与期望．

19.（本小题满分 12 分）

在$\triangle ABC$中，其内角分别为 A、B、C，且满足 $\sin C-\sin B=\sin(A-B)$．

（1）求角 A 的大小；

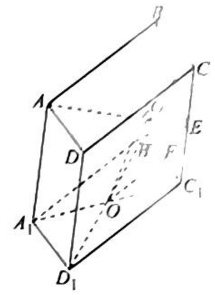
（2）已知$\triangle ABC$外接圆的半径为$\sqrt{3}$，D 为 BC 边上的一点，$\angle BAD=\frac{\pi}{6}$，$AD=1$，求$\triangle ABC$的周长．

20.（本小题满分12分）

如图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$BB_1=2BC=4$，点G在棱BB_1上，$BB_1=4B_1G$，E，F分别为CC_1，B_1C_1的中点，A_1C_1与B_1D_1相交于点O.

(1)求证：平面OGF//平面ABE；

(2)求平面ABE与平面$A_1B_1C_1D_1$的夹角的大小.



21.（本小题满分12分）

已知抛物线E：$y=ax^2(a>0)$的焦点为F，A为E上一点，$|AF|$的最小值为1.

(1)求抛物线E的标准方程；

(2)过焦点F作互相垂直的两条直线l_1，l_2，l_1与抛物线E相交于P，Q两点，l_2与抛物线E相交于M，N两点. 若C，D分别是线段PQ，MN的中点，求$|FC|^2+|FD|^2$的最小值.

22.（本小题满分12分）

已知函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2$，$f(x)$的导函数记为$f'(x)$，$g(x)=2\ln x$，$h(x)=f'(x)+g(x)$.

(1)求函数$h(x)$切线斜率的最小值；

(2)设函数$F(x)$在$x=x_0$处的切线方程为$y=kx+m$，若$[F(x)-(kx+m)](x-x_0)>0$在$F(x)$的定义域内(除去$x=x_0$)成立，则称x_0为函数$F(x)$的"奇点". 试问函数$h(x)$是否存在"奇点"？若存在，请求出来；若不存在，请说明理由.

2023届高三年级10月份大联考

数学参考答案及评分细则

一、单选题

1. A 【解析】$(\complement_{R}A)\cap B=(-2,3)\cap[0,4]=[0,3)$. 故选 A.

2. B 【解析】因为$(4+3i)\bar{z}=5(3+i)$,所以$\bar{z}=\dfrac{5(3+i)}{4+3i}=3-i$,所以$z=3+i$. 故选 B.

3. C 【解析】显然△ABC为直角三角形,且BC为斜边,所以其欧拉线方程为斜边上的中线,BC的中点为$D(-3,1)$,所以AD的方程为$y=-\dfrac{1}{3}x$,所以欧拉线的一般式方程为$x+3y=0$. 故选 C.

4. B 【解析】$p:(x+1)(x-2)\leqslant 0\Leftrightarrow -1\leqslant x\leqslant 2$,$q:\dfrac{x-2}{x+2}\leqslant 0\Leftrightarrow -2<x\leqslant 2$,因为$[-1,2]\subsetneqq(-2,2]$,所以$p$为$q$的充分不必要条件. 故选 B.

5. D 【解析】由已知得,双曲线的方程为$x^2-y^2=1$,直线AB的方程为$y=x+1$,与一条渐近线$y=x$平行,所以C到直线$y=x+1$的距离d的取值范围为$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$,又$|AB|=\sqrt{2}$,所以△$ABC$面积的取值范围为$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$. 故选 D.

6. C 【解析】在等差数列$\{a_n\}$中,设公差为d,因为$a_2+a_4=14$,所以$2a_3=14$,解得$a_3=7$. 又a_1,a_2,a_6成等比数列,所以$a_2^2=a_1a_6$,故有$(7-d)^2=(7-2d)(7+3d)$,整理得$d^2-3d=0$,因为$d\neq 0$,所以$d=3$,从而$a_n=7+3(n-3)$. 即$a_n=3n-2$,$\because a_n=2023$,$\therefore 3n-2=2\ 023$,故$n=675$. 故选 C.

7. A 【解析】设从大班中随机抽取1名学生,抽取到一班学生的概率为p,则抽取到二班学生的概率为$1-p$,由题意得,$0.4p+0.5(1-p)=0.44$,解得$p=0.6$,由条件概率可知,若从大班中随机抽取1名学生,若抽取到的是女生,则她来自一班的概率为$\dfrac{0.6\times 0.4}{0.44}=\dfrac{6}{11}$. 故选 A.

8. C 【解析】沿着棱AA_1将棱柱的侧面展开成一个矩形,当$A_1D+DE+EA$取得最小值时,$B_1D=1$,$C_1E=2$,在C_1C上取F点,使得$C_1F=1$,因为$B_1D/\!/EF$,$B_1D=EF$,所以四边形EFB_1D为平行四边形,所以$B_1F/\!/DE$,$B_1F=DE$,所以B_1F、DE与平面AA_1C_1C所成的角相等. 取A_1C_1的中点为G,连接GF、B_1G,因为$B_1G\perp A_1C_1$,$B_1G\perp AA_1$,所以$B_1G\perp$平面AA_1C_1C,所以$\angle B_1FG$为B_1F与平面AA_1C_1C所成的角,即DE与平面AA_1C_1C所成的角,又$B_1G=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$,$B_1F=\sqrt{10}$,所以$\sin\angle B_1FG=\dfrac{B_1G}{B_1F}=\dfrac{3\sqrt{30}}{20}$. 故选 C.

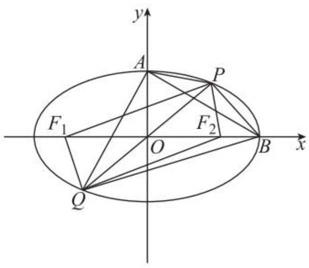
二、多选题

9. ACD 【解析】体温从低到高依次为36.1,36.2,36.2,36.2,36.3,36.3,36.6,选项A:极差为$36.6-36.1=0.5$℃,故正确;选项B:众数为36.2℃,故不正确;选项C:中位数为36.2℃,故正确;选项D:因为$7\times 80\%=5.6$,所以体温的第80百分位数为从小到大排列的第6个数,是36.3℃,故正确. 故选 ACD.

10. ACD 【解析】选项A:由偶函数的定义直接得,$f(-x)g(-x)=[-f(x)][-g(x)]=f(x)g(x)$,所

以 $f(x)g(x)$ 为偶函数,故正确;选项 B:$f(x)g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上不一定是增函数,比如,$f(x)=x,g(x)=x$ 在 $\mathbf{R}$ 上都是单调递增函数,但 $f(x)g(x)=x^2$ 在 $\mathbf{R}$ 上不是单调递增函数,故不正确;选项 C:$f(g(-x))=f(-g(x))=-f(g(x))$,所以 $f(g(x))$ 为奇函数,故正确;选项 D:因为函数 $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f(g(x))$ 有意义,由复合函数单调性的判断法则得,$f(g(x))$ 在 $\mathbf{R}$ 上一定是增函数,故正确. 故选 ACD.

11. BD 【解析】如图所示,由已知得,Q 点必在椭圆上,且 $a=\sqrt{6},b=\sqrt{2},c=2$.



选项 A:$|PF_2|+|QF_2|=|PF_2|+|PF_1|=2\sqrt{6}$,故不正确;选项 B:$\triangle PQB$ 的面积为 $\triangle POB$ 的面积的 2 倍,所以 $\triangle PQB$ 面积的最大值为 $ab=2\sqrt{3}$,故正确;选项 C:因为 F_1,F_2 关于原点对称,且 P,Q 关于坐标原点对称,所以四边形 PF_1QF_2 是平行四边形,所以四边形 PF_1QF_2 四边的平方和等于 $|PQ|^2+|F_1F_2|^2=|PQ|^2+16\geqslant(2\sqrt{2})^2+16=24$,故不正确;选项 D:因为 $b=\sqrt{2}<c=2$,所以以 F_1F_2 为直径的圆 O 与椭圆有 4 个不同的交点,当 M 位于圆 O 内且在椭圆上时,$\angle F_1MF_2>\frac{\pi}{2}$,故正确. 故选 BD.

12. BCD 【解析】选项 A:若 $c=0$,则 $a|c|=b|c|$,所以 A 为假;选项 B:因为 $a<b<c<0,d<e<f<0$,所以 $-a>-b>-c>0,-d>-e>-f>0$,所以 $\frac{1}{-f}>\frac{1}{-e}>\frac{1}{-d}>0$,所以 $\frac{-a}{-f}>\frac{-b}{-e}>\frac{-c}{-d}$,所以 $\frac{a}{f}>\frac{b}{e}>\frac{c}{d}$,所以 B 真;选项 C:$\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}-\frac{a-c}{b}=\frac{(a-c)+(c-b)}{c}-\frac{c-b}{a}-\frac{a-c}{b}=\left(\frac{a-c}{c}-\frac{a-c}{b}\right)+\left(\frac{c-b}{c}-\frac{c-b}{a}\right)=(a-c)\frac{b-c}{bc}+(c-b)\frac{a-c}{ac}=\frac{(a-c)(b-c)(a-b)}{abc}$,因为 $a<b<c<0$,所以 $\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}-\frac{a-c}{b}=\frac{(a-c)(b-c)(a-b)}{abc}>0$,所以 C 为真;选项 D:∵$0<a<1,0<b<1$,∴$\sqrt{ab}>ab$,$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\geqslant 2\sqrt{\sqrt{ab}}>2\sqrt{ab}$,所以 D 为真. 故选 BCD.

三、填空题

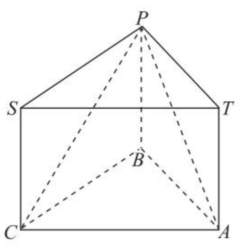
13. -4 【解析】设向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{e}_1+m\boldsymbol{e}_2$,则有 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线,所以存在实数 λ 使得 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,即 $\lambda(\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2)=-2\boldsymbol{e}_1+m\boldsymbol{e}_2$,所以 $\begin{cases}\lambda=-2\\2\lambda=m\end{cases}$,解得 $\begin{cases}\lambda=-2\\m=-4\end{cases}$. 故答案为 -4.

14. $-\frac{7}{9}$ 【解析】由 $\cos 2\theta+2\cos\theta+1=\sin^2\theta$ 得:$3\cos^2\theta+2\cos\theta-1=0\Rightarrow(\cos\theta+1)(3\cos\theta-1)=0$,因为 $\theta\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$,所以 $\cos\theta>0$,由此可得 $\cos\theta=\frac{1}{3}$,故 $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=-\frac{7}{9}$. 故答案为 $-\frac{7}{9}$.

15. $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ 【解析】构造 $u(x)=\frac{1}{2}e^x+2e^{-x}$,∴$u'(x)=\frac{1}{2}e^x-2e^{-x}=\frac{1}{2}e^{-x}(e^{2x}-4)$,当 $0<x<\ln 2$ 时,$u'(x)<0$,当 $x>\ln 2$,$u'(x)>0$,

$\therefore u(x)\geqslant u(\ln 2)=\frac{1}{2}\times 2+2\times\frac{1}{2}=2$ 成立，当 $x\geqslant 0$ 时，$f'(x)=\frac{1}{2}e^{x}+2e^{-x}-2\cos x\geqslant 2-2\cos x=2(1-\cos x)\geqslant 0$，故 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递增；当 $x<0$ 时，$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{2}$ 单调递增，又函数 $f(x)$ 的图象在 $x=0$ 处连续不间断，$\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，因为 $f[\log_3(x^2-x)]>f(\log_3 2)$，所以 $\log_3(x^2-x)>\log_3 2$，可得 $x^2-x>2$，求得：$x<-1$ 或 $x>2$，故答案为 $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$.

16. $\frac{256}{3}\pi$ **【解析】** 由题意可知，因为 $PB\perp$ 平面 ABC，$\angle ABC=120°$ 且 $BA=BC$，$AC=6$，我们可以将三棱锥 $P-ABC$ 补成直三棱柱如图所示，该直三棱柱的外接球就是三棱锥 $P-ABC$ 的外接球，而直三棱柱的外接球球心落在上下底面外接圆圆心连线的中点上，设 $\triangle ABC$ 外接圆半径为 r，直三棱锥 $P-ABC$ 的外接球半径为 R，由正弦定理可得：$2r=\frac{6}{\sin\frac{2\pi}{3}}=4\sqrt{3}$，所以 $r=2\sqrt{3}$，$R^2=r^2+\left(\frac{PB}{2}\right)^2=12+4=16$，所以直三棱锥 $P-ABC$ 外接球的体积为 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{256}{3}\pi$. 故答案为 $\frac{256}{3}\pi$.



四、解答题

17. **解**：(1) $2S_n=n(a_{n+1}-1)$，$2S_{n-1}=(n-1)(a_n-1)$ $(n\geqslant 2)$，两式相减得 $2a_n=na_{n+1}-na_n-1$，

$(n+1)a_n=na_{n+1}-1$，（1分）

$\frac{a_n}{n}=\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{1}{n(n+1)}$，$\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，$\frac{a_n}{n}-\frac{a_{n-1}}{n-1}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$，…，$\frac{a_2}{2}-\frac{a_1}{1}=1-\frac{1}{2}$，采用累加法可得 $\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_1}{1}=\frac{n}{n+1}$，（3分）

则 $\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{n}{n+1}+2$，$a_{n+1}=n+2(n+1)$，$a_n=n-1+2n=3n-1(n\geqslant 2)$，当 $n=1$ 时，$a_1=2$，符合上式，所以 $a_n=3n-1$，（4分）

$S_n=\frac{n(3n+2-1)}{2}=\frac{3n^2+n}{2}$.（5分）

(2) $b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$，（6分）

所以 $T_n=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right]=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)$，（9分）

所以 $T_n<\frac{1}{6}$.（10分）

18. **解**：(1)零假设为 H_0：出现“天上钩钩云”与次日的“地上雨淋淋”无关.

根据所给数据，完成下面的 2×2 列联表（表中数据单位：天），具体如下：

天上钩钩云	地上雨淋淋		总计
	下雨	未下雨	
出现	60	40	100
未出现	30	70	100
合计	90	110	200

（2分）

所以：$\chi^2=\frac{200\times(60\times 70-40\times 30)^2}{100\times 100\times 90\times 110}=\frac{200}{11}\approx 18.182$，（4分）

容易判断出：$18.182>6.635=x_{0.01}$，所以根据小概率 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，我们推断 H_0 不成立，即认为该地区出现"天上钩钩云"与次日的"地上雨淋淋"有关.　　(5 分)

(2)依题意，在该地区统计的"地上雨淋淋"中下雨的天数中随机抽取 9 天，出现"天上钩钩云"的天数 $\frac{60}{90}\times9=6$ 天，未出现的天数有 $\frac{30}{90}\times9=3$ 天，　　(6 分)

从中任意选取 3 天，X 的取值可能为 0，1，2，3，

则有：

$P(X=0)=\frac{C_6^3}{C_9^3}=\frac{5}{21}$，$P(X=1)=\frac{C_6^2C_3^1}{C_9^3}=\frac{15}{28}$，$P(X=2)=\frac{C_6^1C_3^2}{C_9^3}=\frac{3}{14}$，$P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_9^3}=\frac{1}{84}$.　　(10 分)

则 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{21}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{84}$

(11 分)

故 $E(X)=0\times\frac{5}{21}+1\times\frac{15}{28}+2\times\frac{3}{14}+3\times\frac{1}{84}=1$.

(12 分)

19. **解**：(1)因为 $\sin C-\sin B=\sin(A-B)$，所以 $\sin(A+B)-\sin B=\sin(A-B)$，　　(1 分)

所以 $\sin(A+B)-\sin(A-B)=\sin B$，所以 $2\cos A\sin B=\sin B$，　　(3 分)

因为 $\sin B\neq0$，所以 $\cos A=\frac{1}{2}$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$；

(4 分)

(2)设内角 A、B、C 所对的边分别是 a，b，c，

由(1)和题设知，$A=\frac{\pi}{3}$，$\triangle ABC$ 外接圆的半径为 $\sqrt{3}$，

由正弦定理得 $a=2R\sin A=2\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}=3$，　　(6 分)

由余弦定理得，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 得，$9=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{3}$，

即 $(b+c)^2-3bc=9$　①，　　(8 分)

因为 $A=\frac{\pi}{3}$，$\angle BAD=\frac{\pi}{6}$，所以 $\angle CAD=\frac{\pi}{6}$，

因为 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$，所以 $\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}c\cdot AD\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}b\cdot AD\sin\frac{\pi}{6}$，

所以 $\sqrt{3}bc=b+c$　②.　　(10 分)

联立①②消去 bc，得 $(b+c)^2-\sqrt{3}(b+c)-9=0$，解得 $b+c=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{39}}{2}$，

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=\frac{6+\sqrt{3}+\sqrt{39}}{2}$.

(12 分)

20. **解**：(1)由已知 $BB_1=4B_1G$，E，F 分别为 CC_1，B_1C_1 的中点得，$GF\parallel BE$，

因为 $GF\not\subset$ 平面 ABE，$BE\subset$ 平面 ABE，

所以 $GF\parallel$ 平面 ABE，　　(2 分)

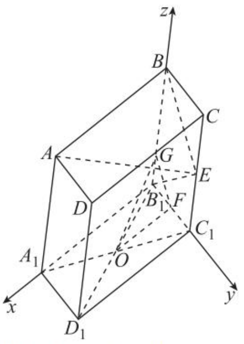
因为 O，F 分别为 A_1C_1，B_1C_1 的中点，所以 $OF\parallel A_1B_1$，

因为 $A_1B_1\parallel AB$，所以 $OF\parallel AB$，同理得，$OF\parallel$ 平面 ABE，　　(4 分)

因为 $OF\cap GF=G$，所以平面 $OGF\parallel$ 平面 ABE；

(6 分)

(2)以 B_1 为原点，以射线 B_1A_1，B_1C_1，B_1B 分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，



设 $AB=a$，则 $B_1(0,0,0)$，$A_1(a,0,0)$，$C_1(0,2,0)$，$A(a,0,4)$，$B(0,0,4)$，$E(0,2,2)$，$O\left(\frac{a}{2},1,0\right)$，$F(0,1,0)$，$G(0,0,1)$， (8 分)

所以$\overrightarrow{B_1E}=(0,2,2)$，$\overrightarrow{AB}=(-a,0,0)$，$\overrightarrow{BE}=(0,2,-2)$，

因为$\overrightarrow{B_1E}\cdot\overrightarrow{AB}=0+0+0=0$，$\overrightarrow{B_1E}\cdot\overrightarrow{BE}=0+4-4=0$，

所以$\overrightarrow{B_1E}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{B_1E}\perp\overrightarrow{BE}$，

又 $AB\cap BE=B$，所以 $B_1E\perp$平面 ABE，

所以$\overrightarrow{B_1E}=(0,2,2)$为平面 ABE 的一个法向量， (10 分)

又平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$，

设平面 ABE 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的夹角的大小为 α，

所以 $\cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{B_1E}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{B_1E}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{2\sqrt{2}\times1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

(其他方法过程结果正确即可) (12 分)

21. **解**：(1)将 $y=ax^2$ 化为标准方程得，$x^2=\frac{1}{a}y$，

因为$|AF|$的最小值为 1，所以$\frac{1}{4a}=1$，解得 $a=\frac{1}{4}$，

所以抛物线 E 的标准方程为 $x^2=4y$. (2 分)

(2)由(1)得，点 $F(0,1)$，显然直线 l_1，l_2 的斜率都存在且不为 0，

设直线 l_1 斜率为 k，则 l_2 的斜率为$-\frac{1}{k}$， (4 分)

直线 l_1 的方程为 $y=kx+1$，由$\begin{cases}y=kx+1\\x^2=4y\end{cases}$消去 y 并整理得 $x^2-4kx-4=0$，

$\Delta=16k^2+16>0$，

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=4k$，所以线段 PQ 中点 $C(2k,2k^2+1)$， (6 分)

$|FC|^2=4(k^2+k^4)$，同理$|FD|^2=4\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^4}\right)$， (8 分)

所以$|FC|^2+|FD|^2=4\left(k^2+\frac{1}{k^2}+k^4+\frac{1}{k^4}\right)$， (10 分)

令 $t=k^2+\frac{1}{k^2}\geqslant2\sqrt{k^2\ \frac{1}{k^2}}=2$，当且仅当 $k^2=\frac{1}{k^2}$，即 $k^2=1$ 时等号成立. 所以 $t^2=k^4+\frac{1}{k^4}+2$，且 $t\in[2,+\infty)$，

所以$|FC|^2+|FD|^2=4(t+t^2-2)=4(t^2+t-2)=4\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-9\geqslant16$，

当且仅当 $t=2$ 时取等号，

所以$|FC|^2+|FD|^2$ 的最小值为 16. (12 分)

22. **解**：(1)$h(x)=x^2-4x+2\ln x$，$h'(x)=2x+\frac{2}{x}-4$，

因为 $x>0$，

所以 $h'(x)=2x+\frac{2}{x}-4\geqslant2\sqrt{2x\cdot\frac{2}{x}}-4=0$，当且仅当$2x=\frac{2}{x}$，即 $x=1$ 时，等号成立，所以函数 $h(x)$ 切线斜率的最小值为 0. (2 分)

(2)$h(x)=x^2-4x+2\ln x$，$h'(x)=2x+\frac{2}{x}-4$，

所以函数 $h(x)$在点 $x=x_0$ 处的切线方程为 $y-(x_0^2-4x_0+2\ln x_0)=\left(2x_0+\frac{2}{x_0}-4\right)(x-x_0)$，

即 $y=\left(2x_0+\dfrac{2}{x_0}-4\right)x-(x_0^2-2\ln x_0+2)$，

所以 $kx+m=\left(2x_0+\dfrac{2}{x_0}-4\right)x-(x_0^2-2\ln x_0+2)$，（4 分）

令 $G(x)=h(x)-(kx+m)=(x^2-4x+2\ln x)-\left[\left(2x_0+\dfrac{2}{x_0}-4\right)x-(x_0^2-2\ln x_0+2)\right]$，

显然 $G(x_0)=0$，$G'(x)=h'(x)-k=\left(2x+\dfrac{2}{x}-4\right)-\left(2x_0+\dfrac{2}{x_0}-4\right)=\dfrac{2}{x}(x-x_0)\left(x-\dfrac{1}{x_0}\right)$，（6 分）

①当 $0<x_0<1$ 时，$G'(x)<0$ 对一切 $x\in\left(x_0,\dfrac{1}{x_0}\right)$ 成立，所以 $G(x)$ 在 $\left(x_0,\dfrac{1}{x_0}\right)$ 上单调递减，

所以 $x\in\left(x_0,\dfrac{1}{x_0}\right)$ 时，$G(x)<G(x_0)=0$，即 $x\in\left(x_0,\dfrac{1}{x_0}\right)$ 时，$G(x)(x-x_0)<0$，

所以此时 x_0 不是奇点；（8 分）

②当 $x_0>1$ 时，$G'(x)<0$ 对一切 $x\in\left(\dfrac{1}{x_0},x_0\right)$ 成立，

所以 $G(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{x_0},x_0\right)$ 上单调递减，

所以 $x\in\left(\dfrac{1}{x_0},x_0\right)$ 时，$G(x)>G(x_0)=0$，即 $x\in\left(\dfrac{1}{x_0},x_0\right)$ 时，$G(x)(x-x_0)<0$，

所以此时 x_0 也不是奇点；（10 分）

③当 $x_0=1$ 时，$G(x)=x^2-4x+2\ln x+3$，$G'(x)=\dfrac{2}{x}(x-1)^2\geqslant 0$ 对一切 $x\in(0,+\infty)$ 成立，

所以 $G(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$G(x)<G(1)=0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$G(x)>G(1)=0$，

所以 $G(x)(x-1)>0$ 在 $F(x)$ 的定义域 $(0,+\infty)$ 内（除去 $x=1$）成立，

所以此时 1 是奇点．（12 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。