

毕节市 2023 届高三年级诊断性考试（三）

理科数学

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、学校、班级填写在答题卡相应位置上。

2. 回答第 I 卷时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。写在本试卷上无效。

3. 回答第 II 卷时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

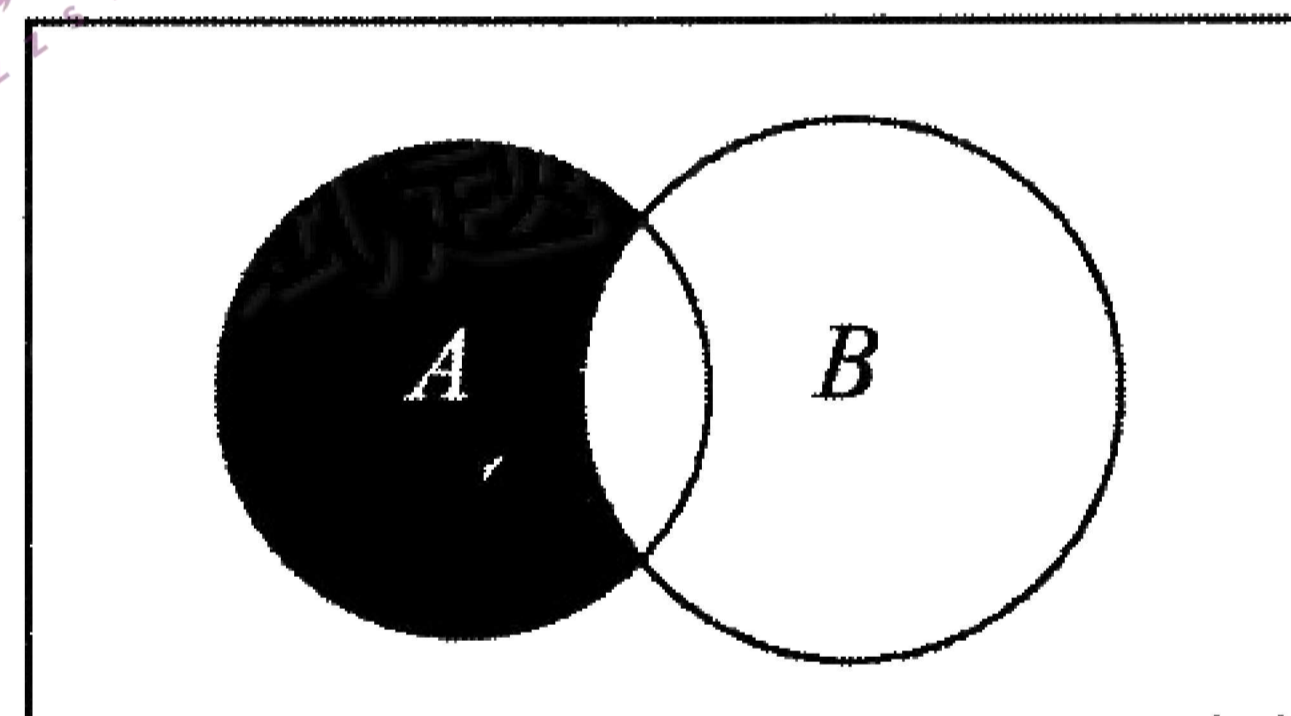
4. 请保持答题卡平整，不能折叠。考试结束，监考员将答题卡收回。

第 I 卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

(1) 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x < 4\}$ ， $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$ ，则下图中阴影部分表示的集合为（ ）

- A. $\{x \mid 1 \leq x < 4\}$ B. $\{-1, 0\}$
C. $\{1, 2, 3\}$ D. $\{x \mid -2 < x < 1\}$



(2) 若复数 z 满足 $(i+1)z = 2i-1$ ，则 z 的虚部为（ ）

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}i$ C. $\frac{3}{2}i$ D. $\frac{3}{2}$

(3) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $m \in \mathbb{N}^*$ ， $S_m = 3$ ， $S_{2m} = 9$ ，则 $S_{3m} =$ （ ）

- A. 16 B. 18 C. 21 D. 27

(4) 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 T ，若 $\frac{\pi}{2} < T < \frac{2\pi}{3}$ ，且 $\frac{\pi}{3}$ 是

$f(x)$ 的一个极值点，则 $\omega =$ （ ）

- A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. $\frac{10}{3}$ D. $\frac{7}{2}$

(5) A, B 两名学生均打算只去甲、乙两个城市中的一个上大学, 且两人去哪个城市互不影响, 若 A 去甲城市的概率为 0.6, B 去甲城市的概率为 0.3, 则 A, B 不去同一城市上大学的概率为 ()

- A. 0.3 B. 0.46 C. 0.54 D. 0.7

(6) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$, 则对任意非零实数 x , 有 ()

- A. $f(-x) - f(x) = 0$ B. $f(-x) - f(x) = -1$
 C. $f(-x) + f(x) = 1$ D. $f(-x) + f(x) = -1$

(7) 若实数 a, b 满足 $2a^2 + 2b^2 - 3ab = 1$, 则 ()

- A. $a + b \geq 2$ B. $a + b \leq 2$
 C. $a^2 + b^2 \leq 1$ D. $a^2 + b^2 \geq 2$

(8) 直线 $l_1: x + (1+a)y = 1 - a (a \in R)$, 直线 $l_2: y = -\frac{1}{2}x$, 给出下列命题:

- ① $\exists a \in R$, 使得 $l_1 // l_2$; ② $\exists a \in R$, 使得 $l_1 \perp l_2$;
 ③ $\forall a \in R$, l_1 与 l_2 都相交; ④ $\exists a \in R$, 使得原点到 l_1 的距离为 2.

其中正确的是 ()

- A. ①② B. ②③ C. ②④ D. ①④

(9) 已知双曲线 $M: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦距为 $2c$, F 为抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点.

以 F 为圆心, c 为半径的圆过双曲线 M 的右顶点. 若圆 $C: (x-c)^2 + y^2 = r^2$ 与双曲线 M 的渐近线有公共点, 则半径 r 的取值范围是 ()

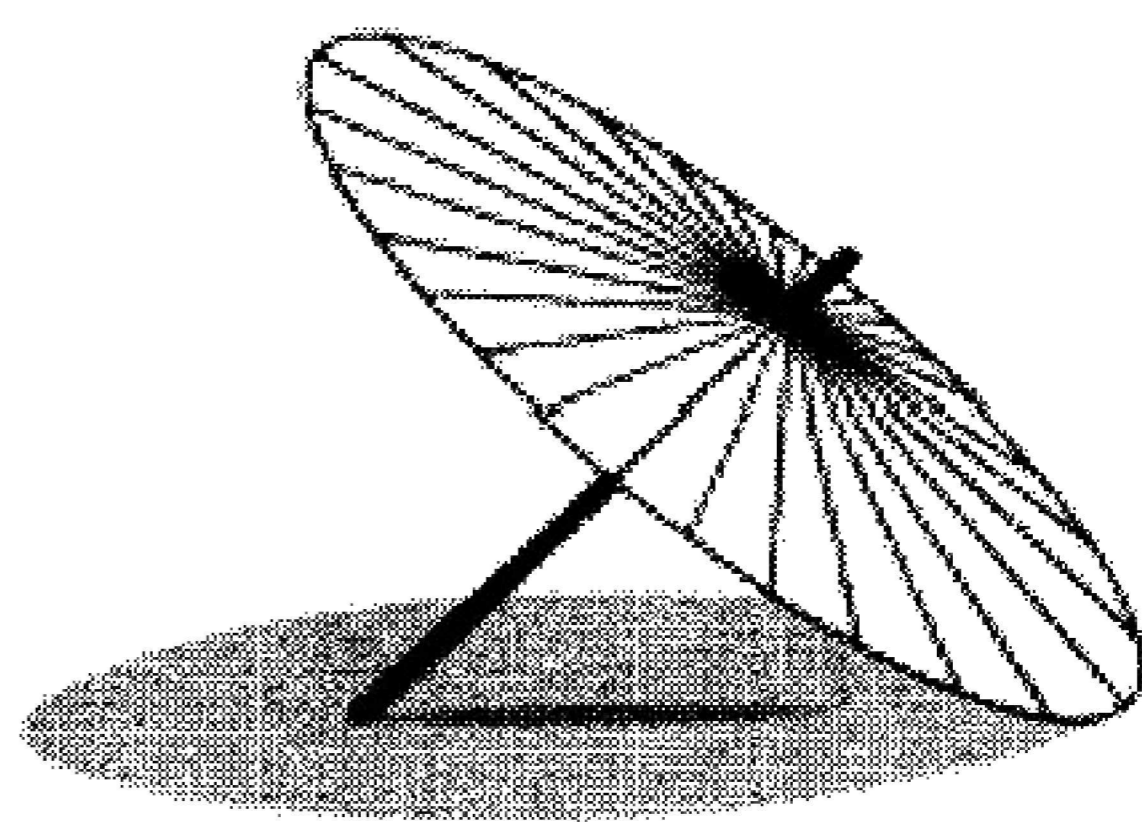
- A. $[1, +\infty)$ B. $[4, +\infty)$ C. $[1, 4]$ D. $(1, +\infty)$

(10) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R , $f(x+3)$ 为偶函数, $f(3x + \frac{3}{2})$ 为奇函数, 则 ()

- A. $f(-\frac{3}{4}) = 0$ B. $f(-\frac{3}{2}) = 0$
 C. $f(3) = 0$ D. $f(6) = 0$

(11) 油纸伞是中国传统工艺品, 至今已有 1000 多年的历史, 为宣传和推广这一传统工艺, 北京市文化宫于春分时节开展油纸伞文化艺术节. 活动中将油纸伞撑开后摆放在户外展览场地上, 如图所示, 该伞的伞沿是一个半径为 $\sqrt{2}$ 的圆, 圆心到伞柄底端距离为 $\sqrt{2}$, 阳光照射油纸伞在地面形成了一个椭圆形影子 (春分时, 北京的阳光与地面夹角为 60°), 若伞柄底端正好位于该椭圆的焦点位置, 则该椭圆的离心率为()

- A. $2 - \sqrt{3}$ B. $\sqrt{2} - 1$
 C. $\sqrt{3} - 1$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$



(12) 已知点 G 为三角形 ABC 的重心, 且 $|\vec{GA} + \vec{GB}| = |\vec{GA} - \vec{GB}|$, 当 $\angle C$ 取最大值时, $\cos C =$ ()

- A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{1}{5}$

第 II 卷

本卷包括必考题和选考题两部分. 第 13 题~第 21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答; 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

(13) 在某市的一次高三测试中, 学生数学成绩 X 服从正态分布 $N(75, \sigma^2)$, 已知

$P(30 \leq X < 75) = 0.35$, 若按成绩分层抽样抽取 100 份试卷进行分析, 其中 120 分以上的试卷份数为_____.

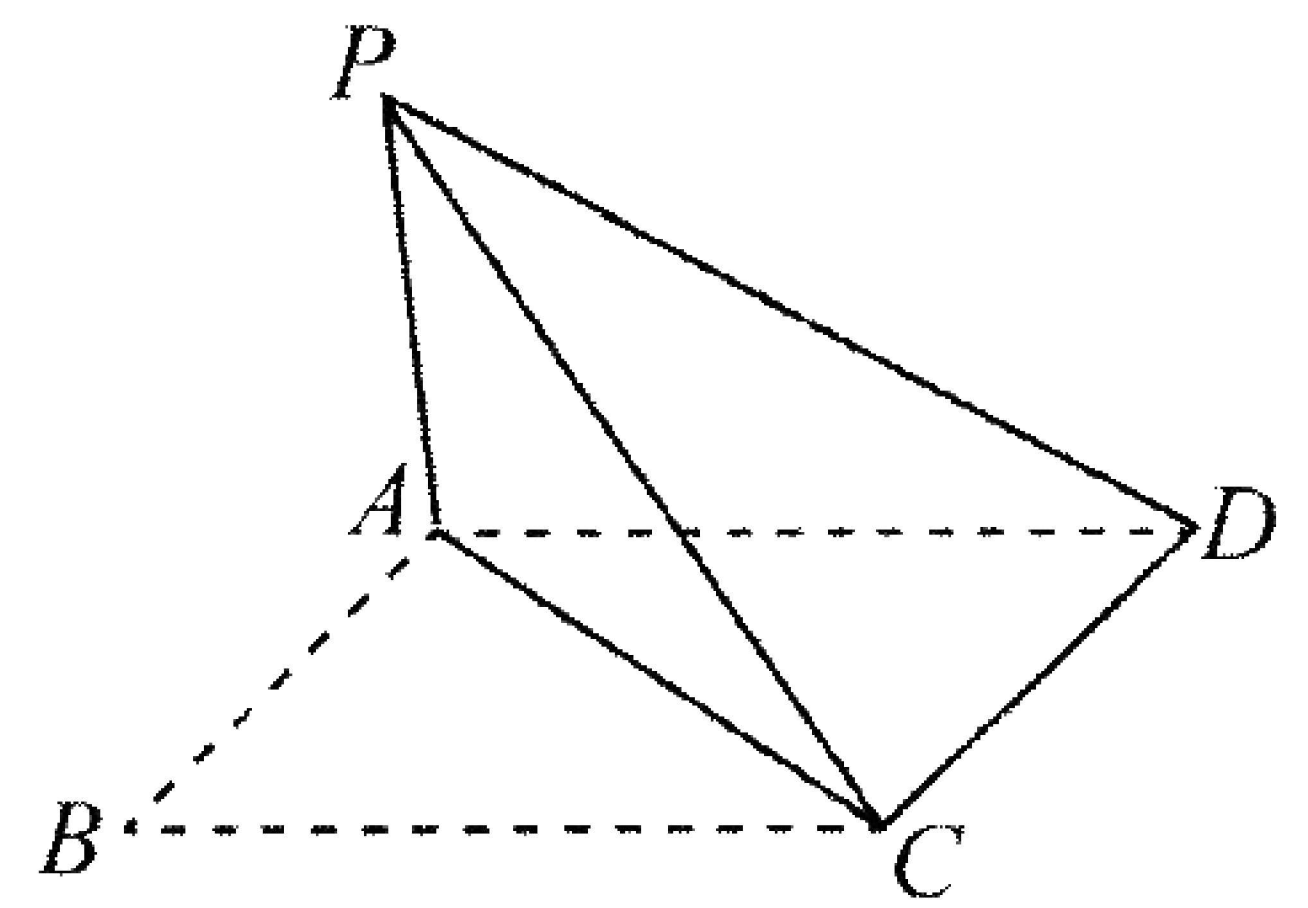
(14) 写出一个同时具有下列性质①②③的非常值函数 $f(x) =$ _____.

① $f'(x) \leq 0$ 在 R 上恒成立; ② $f'(x)$ 是偶函数; ③ $f(x_1 x_2) + f(x_1) f(x_2) = 0$.

(15) 将正整数排成如图所示的数阵, 其中第 k 行有 2^k 个数, 如果 2023 是表中第 m 行的第 n 个数, 则 $m + n =$ _____.

1	2						
3	4	5	6				
7	8	9	10	11	12	13	14
...							

(16) 如图, 菱形 $ABCD$ 的边长为 2, $\angle B = 60^\circ$. 将 $\triangle ABC$ 沿 AC 折到 PAC 的位置, 连接 PD 得三棱锥 $P-ACD$.



①若三棱锥 $P-ACD$ 的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $PD = \sqrt{3}$ 或 3;

②若 $BD \perp$ 平面 PAC , 则 $PD = 2\sqrt{3}$;

③若 M, N 分别为 AC, PD 的中点, 则 $MN \parallel$ 平面 PAB ;

④当 $PD = \sqrt{6}$ 时, 三棱锥 $P-ACD$ 的外接球的体积为 $\frac{20\sqrt{15}\pi}{27}$.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题: 本大题共 7 小题, 共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) (本题满分 12 分) 已知 a, b, c 分别是 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边, 且

$$\sqrt{3}b \cos C + c \sin B - \sqrt{3}a - \sqrt{3}c = 0.$$

(I) 求 B ;

(II) 若 $b = 2\sqrt{7}$, 且 $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$, 求 a, c .

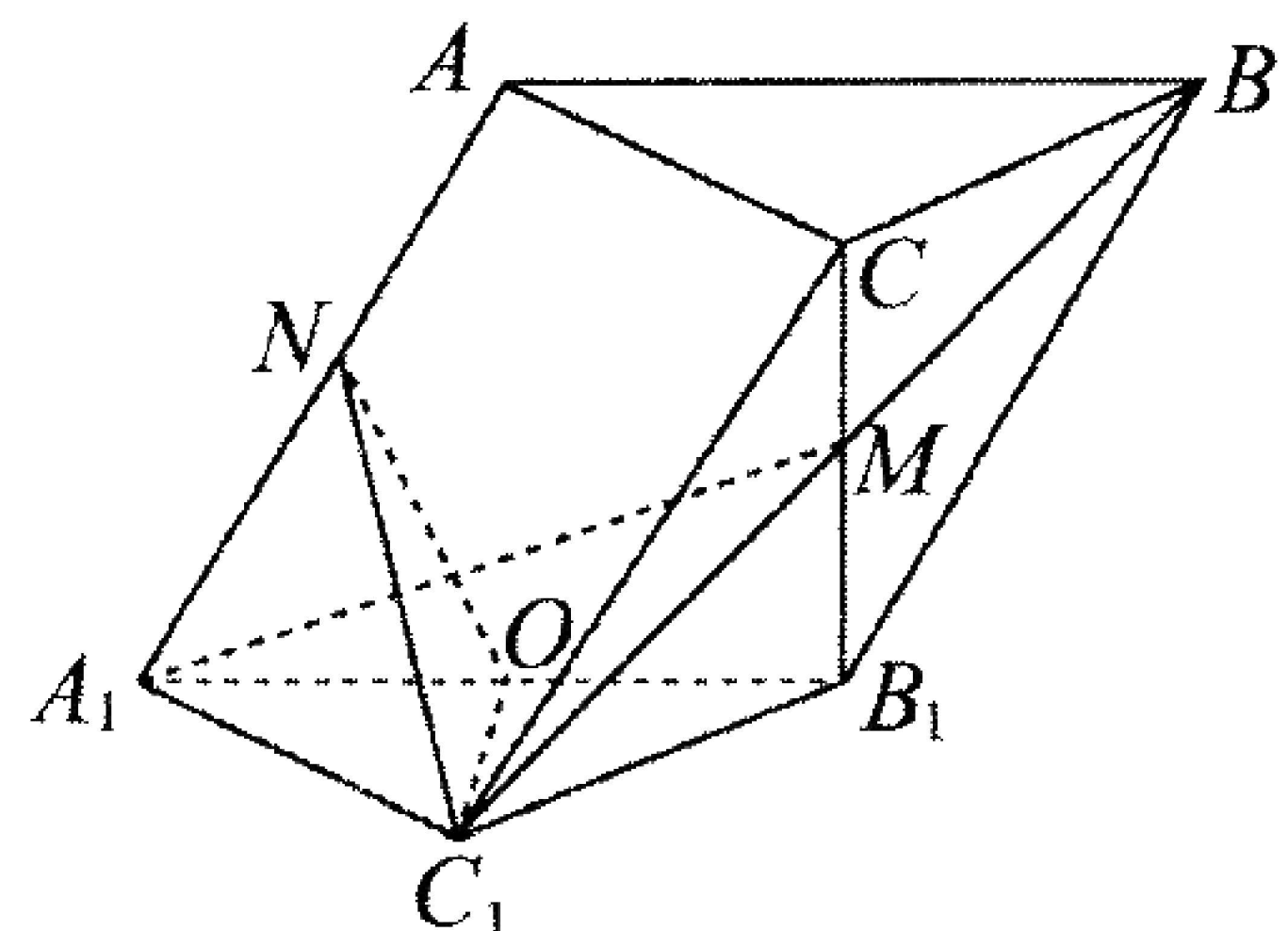
(18) (本题满分 12 分) 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 四边形 AA_1B_1B 是菱形, $\angle AA_1B_1 = 60^\circ$,

平面 $AA_1B_1B \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$, $\triangle ABC$ 是等腰三角形, $\angle ACB = 120^\circ$, $AB = 2\sqrt{3}$, B_1C

与 BC_1 交于点 M , AA_1, A_1B_1 的中点分别为 N, O , 如图所示.

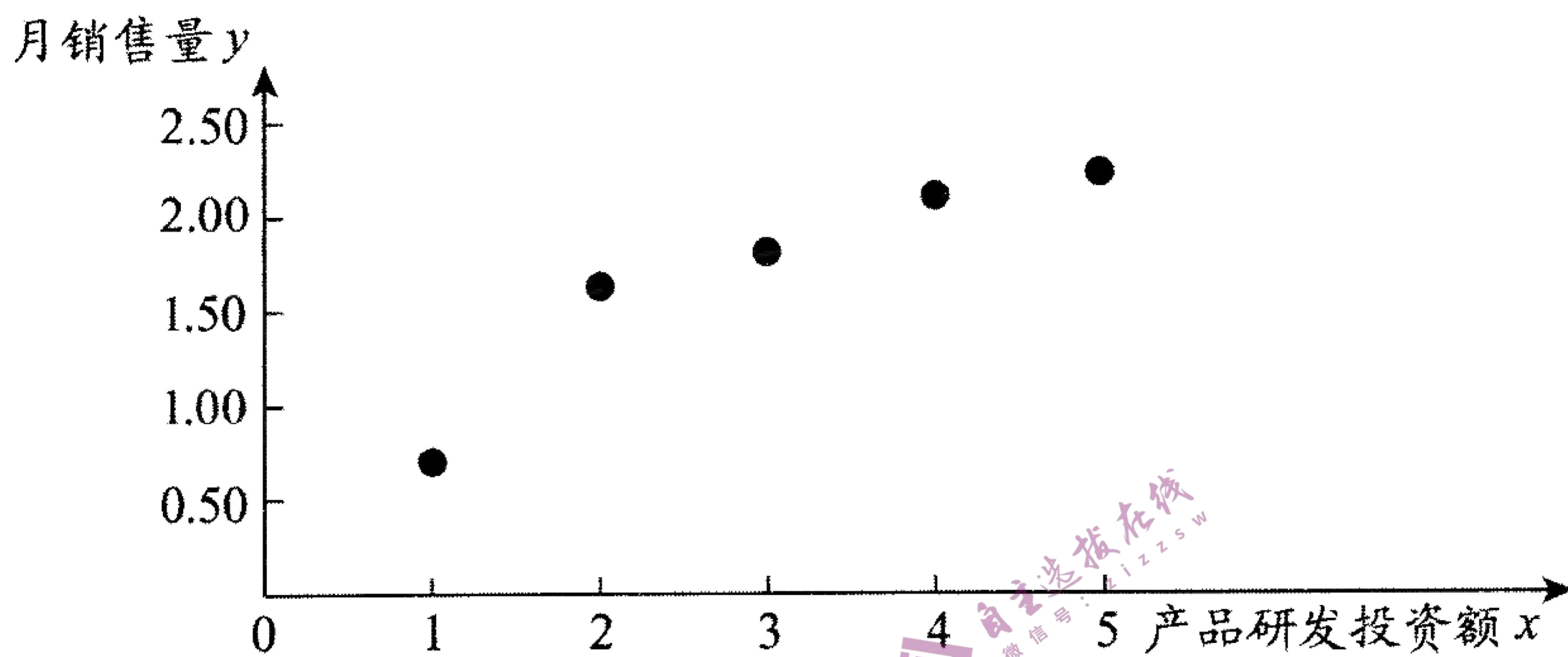
(I) 在平面 AA_1B_1B 内找一点 D , 使 $MD \parallel$ 平面 C_1NO , 并加以证明;

(II) 求二面角 $M-A_1B_1-C_1$ 的正弦值.



(19) (本题满分12分) 某新能源汽车公司对其产品研发投资额 x (单位: 百万元) 与其月销售量 y (单位: 千辆) 的数据进行统计, 得到如下统计表和散点图.

x	1	2	3	4	5
y	0.69	1.61	1.79	2.08	2.20



(I) 通过分析散点图的特征后, 计划用 $y = \ln(bx + a)$ 作为月销售量 y 关于产品研发投资额 x 的回归分析模型, 根据统计表和参考数据, 求出 y 关于 x 的回归方程;

(II) 公司决策层预测当投资额为 11 百万元时, 决定停止产品研发, 转为投资产品促销. 根据以往的经验, 当投资 11 百万元进行产品促销后, 月销售量 ξ 的分布列为:

ξ	3	4	5
P	$\frac{3}{2}p^2$	p	$p + \frac{1}{6}$

结合回归方程和 ξ 的分布列, 试问公司的决策是否合理.

参考公式及参考数据: $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$, $\ln 7 \approx 1.95$

y	0.69	1.61	1.79	2.08	2.20
e^y (保留整数)	2	5	6	8	9

(20) (本题满分 12 分) 已知椭圆 C 的下顶点 M , 右焦点为 F , N 为线段 MF 的中点,

O 为坐标原点, $|ON| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 点 F 与椭圆 C 上任意一点的距离的最小值为 $\sqrt{3} - \sqrt{2}$.

(I) 求椭圆 C 的标准方程;

(II) 直线 $l: y = kx + m (k \neq 0)$ 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 若存在过点 M 的直线 l' , 使得点 A 与点 B 关于直线 l' 对称, 求 ΔMAB 的面积取值范围.

(21) (本题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{e^{x+1}}{a} - \ln x - \ln a$.

(I) 当 $a = \frac{1}{e}$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(II) 若 $f(x) + 1 \geq 0$, 求实数 a 的取值范围.

请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分. 作答时用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应题号的方框涂黑.

(22) (本题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

直角坐标系 xOy 中, 点 $P(0,1)$, 动圆 $C: (x - \sin \alpha)^2 + (y - 3\sin \alpha - 1)^2 = 1 (\alpha \in R)$.

(I) 求动圆圆心 C 的轨迹;

(II) 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 M 的极坐标方程为: $\rho^2 = \frac{2}{2\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$, 过点 P 的直线 l 与曲线 M 交于 A, B 两点, 且

$\|PA\| - \|PB\| = \frac{4}{7}$, 求直线 l 的斜率.

(23) (本题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

设不等式 $|x+1| > a (a \in N^*)$ 的解集为 A , 且 $\frac{3}{2} \in A$, $\frac{1}{2} \notin A$.

(I) 求 a 的值;

(II) 若 m, n, s 为正实数, 且 $m + n + \sqrt{2}s = a$, 求 $m^2 + n^2 + s^2$ 的最小值.