# 参考答案

## 一、选择题

1. B　2. D　3. C　4. C　5. C　6. A
7. D　8. B　9. A　10. D　11. C　12. C

## 二、填空题

13. $-\sqrt{3}$　14. $\frac{5}{2}$　15. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　16. $[\frac{e}{\ln 2}, e^{e-1})$

## 提示：

1. $A=\{x|x<1\}$，$B=\{x|x>2$ 或 $x\leqslant\frac{1}{2}\}$，$\therefore \complement_R B=\{x|\frac{1}{2}<x\leqslant 2\}$，$\therefore \complement_R B\cap A=\{x|\frac{1}{2}<x<1\}$. 故选 B.

2. 依题意得 $z_2=-3-i$，$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3-i}{-3-i}=-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$. 故选 D.

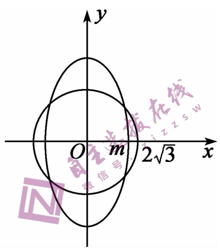
3. 当 $x<2$ 时，$f(x)$ 只有一个零点，且该零点为负数；当 $x\geqslant 2$ 时，若 $f(x)$ 有零点，则 $\sqrt{-2a}\geqslant 2$，即 $a\leqslant -2$，此时 $f(x)$ 只有一个零点，且该零点为正数，故"$a\leqslant -2$"是 $f(x)$ 有 2 个零点的充要条件. 故选 C.

4. 由 $2^0=1$，$2^{12}=4096$，$2^{13}=8192$，可得输出 $n$ 的值为 13. 故选 C.

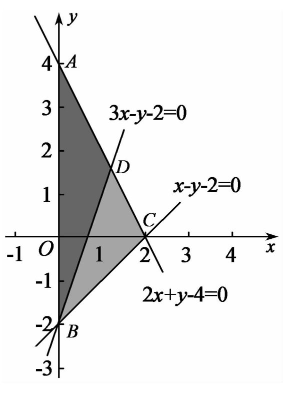
5. 不妨设 $f(x)=\sin\omega x$，$\because f(x)$ 图象关于 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称，$\therefore \frac{\omega\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{N}$，$\therefore \omega=3k+\frac{3}{2}$，$k\in\mathbf{N}$，又 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{6}]$ 上单调，$\therefore \frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{\omega}\geqslant\frac{\pi}{6}$，故 $0<\omega\leqslant 3$，故 $\omega=\frac{3}{2}$. 故选 C.

6. $\triangle ABC$ 的外接圆直径为 $2r=\frac{3}{\sin\frac{\pi}{6}}=6$，故三棱锥外接球半径 $R=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$，故外接球的表面积为 $4\pi R^2=72\pi$. 故选 A.

7. 设动点 $P(x,y)$，由题得 $\sqrt{(x-6)^2+y^2}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{(x-2)^2+y^2}$，化简得 $x^2+y^2=12$. $\therefore$ 动点 $P$ 的轨迹是以原点为圆心，以 $2\sqrt{3}$ 为半径的圆. $\because P$ 点轨迹与椭圆 $C$ 恰有 4 个不同的交点，$\therefore 0<m<2\sqrt{3}$. $\therefore$ 椭圆 $C$ 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{16-m^2}}{4}>\frac{\sqrt{16-(2\sqrt{3})^2}}{4}=\frac{1}{2}$. $\because$ 椭圆的离心率 $e\in(0,1)$，$\therefore$ 椭圆 $C$ 的离心率的取值范围为 $(\frac{1}{2},1)$. 故选 D.



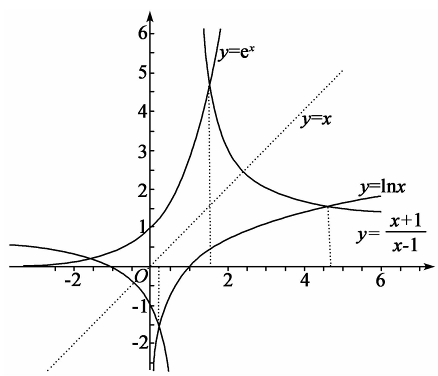

8. 作出不等式组表示的平面区域 $M$（$\triangle ABC$ 及其内部），而满足不等式 $3x_0-y_0-2\leqslant 0$ 的点在 $\triangle ABD$ 内，由题意可得 $A(0,4)$，$B(0,-2)$，$C(2,0)$，$D(\frac{6}{5},\frac{8}{5})$，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times[4-(-2)]\times 2=6$，$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times[4-(-2)]\times\frac{6}{5}=\frac{18}{5}$，$\therefore$ 所求概率 $P=\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{3}{5}$. 故选 B.




9. 对于 A，$\ln a^2>\ln b^2\Rightarrow|a|>|b|\Rightarrow 2^{|a|}>2^{|b|}$，成立；对于 B，$\frac{|a|}{a^2}>\frac{|b|}{b^2}$，则 $\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$，则 $|a|<|b|$，故不能推出 $2^a<2^b$，不成立；对于 C，$b>a>e$，由 $\frac{\ln a}{a}>\frac{\ln b}{b}$ 得 $a^b>b^a$，不成立；对于 D，由 $0<2a<b<3-a^2$，则 $0<a<\frac{b}{2}<\frac{3-a^2}{2}<\frac{3}{2}$，故 $\sin a<\sin\frac{b}{2}$，不成立. 故选 A.

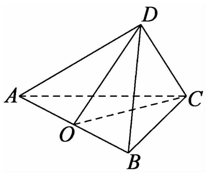
10. 设动圆 $Q$ 圆心为 $(x,y)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_1,y_1)$，$D(x_0,-1)$，依题意得：$\sqrt{x^2+(y-1)^2}=|y+1|$，即 $\Gamma$ 的方程为 $x^2=4y$，故 A 正确；由 $x^2=4y$ 得，$y=\frac{1}{4}x^2$，$\therefore y=\frac{1}{2}x$，$\therefore$ 切线 $DA$ 的方程为：$y-y_1=\frac{1}{2}x_1(x-x_1)$，即 $y=\frac{1}{2}x_1x-\frac{1}{2}x_1^2+v_1$，又 $x_1^2=4y_1$，$\therefore y=\frac{1}{2}x_1x-y_1$，同理可得切线 $DB$ 的方程为 $y=\frac{1}{2}x_2x-y_2$，又切线 $LA$，$DB$ 经过点 $D(x_0,-1)$，$\therefore y_1=\frac{1}{2}x_0x_1+1$，$y_2=\frac{1}{2}x_0x_2+1$，故直线 $AB$ 的方程为 $y=\frac{1}{2}x_0x+1$，$\therefore$ 直线 $AB$ 过定点 $F(0,1)$，故 B 正确；联立 $\begin{cases}y=\frac{1}{2}x_0x+1\\x^2=4y\end{cases}$ 消 $y$ 整理得 $x^2-2x_0x-4=0$，故 $x_1+x_2=2x_0$，$x_1x_2=-4$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(\frac{1}{2}x_0x_1+1)(\frac{1}{2}x_0x_2+1)=(1+\frac{1}{4}x_0^2)x_1x_2+\frac{1}{2}x_0(x_1+x_2)+1=-3<0$，$\therefore\angle AOB$ 为钝角，故 C 正确；由于直线 $AB$ 恒过抛物线焦点 $F(0,1)$，设 $AB$ 中点为 $M$，过 $A,M,B$ 向直线 $y=-1$ 作垂线，垂足分别为 $A'$、$M'$、$B'$，连结 $AM'$、$BM'$，由抛物线定义 $|AA'|=|AF|$，$|BB'|=|BF|$，$\therefore|MM'|=\frac{1}{2}(|AA'|+|BB'|)=\frac{1}{2}(|AF|+|BF|)=\frac{1}{2}|AB|$，$\therefore$ 以 $AB$ 为直径为圆与直线 $y=-1$ 相切，故 D 错误. 故选 D.

11. 对于 A 选项，由函数 $y=e^x$ 与 $y=\frac{x+1}{x-1}$ 满足性质 $f(-x)=\frac{1}{f(x)}$，则 $x_1$ 与 $-x_1$ 都为函数 $y=e^x-\frac{x+1}{x-1}$ 的零点，有 $x_2=-x_1$，即 A 正确；对于 B 选项，由函数 $y=\ln x$ 与 $y=\frac{x+1}{x-1}$ 都满足性质 $f(\frac{1}{x})=-f(x)$，则 $x_3$ 与 $\frac{1}{x_3}$ 都为函数 $y=\ln x-\frac{x+1}{x-1}$ 的零点，有 $x_4=\frac{1}{x_3}$，即 B 正确；对于 C 选项，如图，由函数 $y=e^x$ 与 $y=\ln x$ 关于直线 $y=x$ 对称，可得 $x_1=\ln x_3$，有 $\frac{\ln x_3}{x_1}=1$，即 C 错误；对



于 D 选项，同上，由 $\begin{cases}x_1+x_2=0\\ x_2=\ln x_4\end{cases}$，可得 $x_1+\ln x_4=0$，有 $x_4e^{x_1}=1$，即 D 正确. 故选 C.

12. ∵平面 $ACD\perp$ 平面 $ABC$，平面 $ABC\cap$ 平面 $BCD=AC$，$AC\perp BC$，$BC\subset$ 平面 $ABC$，∴$BC\perp$ 平面 $ACD$，又∵$AD\subset$ 平面 $ACD$，∴$AD\perp BC$，又∵$AD\perp DC$，$BC\cap DC=C$，$BC\subset$ 平面 $BCD$，$DC\subset$ 平面 $BCD$，∴$AD\perp$ 平面 $BCD$，又∵$BD\subset$ 平面 $BCD$，∴$AD\perp BD$，即 $\angle ADB$ 为直角，又∵$\angle ACB$ 为直角，∴取 $AB$ 的中点 $O$，连接 $OC$，$OD$，由直角三角形的斜边上的中线性质 $OA=OB=OC=OD$，可得 $O$ 为三棱锥 $D-ABC$ 外接球的球心，由三棱锥 $D-ABC$ 外接球的表面积为 $4\pi$，可得外接球的半径 $r=1$，∴$AB=2$，$BC=1$，$AC=\sqrt3$，$CD=\frac{\sqrt3}{2}$，$AD=\frac32$，∵$BC\perp$ 平面 $ACD$，$\angle ADB$ 为直角，∴三棱锥 $D-ABC$ 的体积为 $\frac13BC\times S_{\triangle ACD}=\frac13\times1\times\frac12\times\frac32\times\frac{\sqrt3}{2}=\frac{\sqrt3}{8}$. 故选 C.

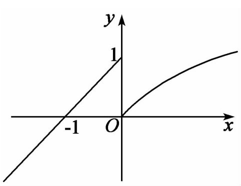


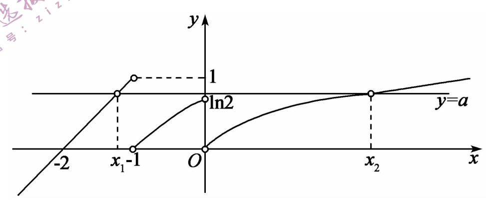

13. 依题意得 $2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=(2-\cos\alpha)\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$，又 $\alpha\in(-\frac{\pi}{2},0)$，$\sin\frac{\alpha}{2}\neq0$，∴$2\cos^2\frac{\alpha}{2}=2-\cos\alpha$，∴$\cos\alpha=\frac12$，又 $\alpha\in(-\frac{\pi}{2},0)$，故 $\alpha=-\frac{\pi}{3}$，则 $\tan\alpha=-\sqrt3$.

14. 由 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(5,-2)$，可得 $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=5-2\lambda=0$，解得 $\lambda=\frac52$.

15. 依题意得 $A(\sqrt6,\frac{\sqrt6x_0-4}{2y_0})$，$B(\frac{2\sqrt6}{3},\frac{\frac{2\sqrt6}{3}x_0-4}{2y_0})$，$y_0^2=2(\frac{x_0^2}{4}-1)$，则 $\frac{|AF|^2}{|BF|^2}=\frac{(\frac{\sqrt6x_0-4}{2y_0})^2}{\frac23+(\frac{\frac{2\sqrt6x_0}{3}-4}{2y_0})^2}=\frac{16x_0^2-24\sqrt6x_0+48}{12x_0^2-16\sqrt6x_0+32}=\frac32$，∴$\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{\sqrt6}{2}$.

16. 法 1：令 $t=f(x)$，画出函数 $f(x)$ 的图象，由 $f(t)=a$，可知：当 $a<0$ 时，方程 $f(t)=a$ 只有一个实根 $t=a-1<-1$，则方程 $f(x)=t$ 也只有一个实根，不合题意. 当 $a=0$ 时，方程 $f(t)=a$ 有两个实根，$t_1=-1$，$t_2=0$，则方程 $f(x)=t_1$ 有一个实根，方程 $f(x)=t_2$ 有两个实根，不合题意. 当 $0<a<\ln2$ 时，方程 $f(t)=a$ 有两个实根，$t_1=a-1<0$，$t_2=e^a-1\in(0,1)$，则方程 $f(x)=t_1$ 有一个实根，方程 $f(x)=t_2$ 有两个实根，不合题意. 当 $\ln2\leqslant a<1$ 时，方程 $f(t)=a$ 有两个实根，$t_1=a-1\in[\ln2-1,0)$，$t_2=e^a-1\in[1,e-1)$，则方程 $f(x)=t_1$ 有一个实根 $x_1$，方程 $f(x)=t_2$ 有一个实根 $x_2$，符合题意. 此时，$x_1+2=t_1=a$，$\ln(x_2+1)=e^a-1$，有 $\ln(\frac{x_2+1}{x_1+2})=\ln(x_2+1)-\ln(x_1+2)=e^a-\ln a-1$. 设 $g(a)=e^a-\ln a-1$，则 $g'(a)=e^a-\frac1a$. 由 $g'(a)$ 单调递增，可得 $g'(a)\geqslant g'(\ln2)=2-\frac{1}{\ln2}>0$，则 $g(a)$ 单调递增，有 $g(a)\in[1-\ln(\ln2),e-1)$，即 $\frac{x_2+1}{x_1+2}\in[\frac{e}{\ln2},e^{e-1})$. 当 $a\geqslant1$ 时，方程 $f(t)=a$ 有一个实根 $t=e^a-1\geqslant e-1>1$，方程 $f(x)=t$ 只有一个实根，不合题意. 综上可知，$\frac{x_2+1}{x_1+2}\in[\frac{e}{\ln2},e^{e-1})$. 法 2：设 $g(x)=f(f(x))$，则 $g(x)=\begin{cases}x+2, & x<-1\\ \ln(x+2), & -1\leqslant x<0\\ \ln(\ln(x+1)+1), & x\geqslant0\end{cases}$，作出图象如下，易知 $a\in[\ln2,1)$. 由 $x_1+2=a$，$\ln(\ln(x_2+1)+1)=a$，即 $x_2+1=e^{e^a-1}$，可得 $\frac{x_2+1}{x_1+2}=\frac{e^{e^a-1}}{a}$. 设 $\varphi(a)=\frac{e^{e^a-1}}{a}$，$a\in[\ln2,1)$，则 $\varphi'(a)=\frac{e^{e^a-1}(ae^a-1)}{a^2}>0$，可得函数 $\varphi(a)$ 单调递增，有 $\varphi(a)\in[\frac{e}{\ln2},e^{e-1})$，即 $\frac{x_2+1}{x_1+2}\in[\frac{e}{\ln2},e^{e-1})$.




## 三、解答题

17. (1) 当 $n=1$ 时，$a_1=\frac{(a_1+2)a_1}{4}$，∴$a_1=2$

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{(a_n+2)a_n}{4}-\frac{(a_{n-1}+2)a_{n-1}}{4}$，

化简得 $a_n^2-a_{n-1}^2=2(a_n+a_{n-1})$

∵$a_n>0$，∴$a_n-a_{n-1}=2$，

∴数列 $\{a_n\}$ 是首项为 2，公差为 2 的等差数列，

∴$a_n=2+(n-1)\times2=2n$

当 $n=1$ 时，$b_1=T_1=2$

当 $n\geqslant2$ 时，$b_n=\frac{T_n}{T_{n-1}}=\frac{2^{n^2}}{2^{(n-1)^2}}=2^{2n-1}$

综上 $b_n=2^{2n-1}$.（6 分）

(2) $a_nb_n=2n\cdot2^{2n-1}=n\cdot4^n$，

设 $R_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=1\cdot4^1+2\cdot4^2+\cdots+n\cdot4^n$ ①

则 $4R_n=1\cdot4^2+2\cdot4^3+\cdots+n\cdot4^{n+1}$ ②

①−②得 $-3R_n=4^1+4^2+\cdots+4^n-n\cdot4^{n+1}=\frac{4(1-4^n)}{1-4}-n\cdot4^{n+1}$

$=\frac{1-3n}{3}\cdot4^{n+1}-\frac43$

∴$R_n=\frac{3n-1}{9}\cdot4^{n+1}+\frac49$.（12 分）

18. (1) 证明：∵$ED\perp$ 平面 $ABCD$，∴$CD\perp DE$.

∵$BD\perp CD$，$BD\cap DE=D$，且 $BD\subset$ 平面 $BDE$，

$DE\subset$ 平面 $BDE$

∴$CD\perp$ 平面 $BDE$.

$\because DE=2CF$，且 $H$ 为 $DE$ 的中点，$\therefore CF=DH$，

又 $\because CF\parallel DH$，

$\therefore$ 四边形 $CDHF$ 是平行四边形，则 $HF\parallel DC$，

$\therefore HF\perp$ 平面 $BDE$.（6 分）

（2）$\because DP=\frac{1}{4}DE=1$，$\therefore DP=1$，$DE=4$，

又 $DE=2CF=2CD=2BD$，$\therefore PH=1$，$CD=BD=2$，

$\therefore FP=BP=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，$BF=\sqrt{2^2\times 3}=2\sqrt{3}$，

$\therefore S_{\triangle BFP}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{5-3}=\sqrt{6}$.

设点 $E$ 到平面 $BFP$ 的距离为 $d$，则 $V_{E-BFP}=\frac{\sqrt{6}}{3}d$.

又 $S_{\triangle EFP}=\frac{1}{2}\times 3\times 2=3$，

$\therefore V_{B-EFP}=\frac{1}{3}\times 3\times 2=2$，

由 $\frac{\sqrt{6}}{3}d=2$，得 $d=\sqrt{6}$，

即点 $E$ 到平面 $BFP$ 的距离为 $\sqrt{6}$.（12 分）

19.（1）由 $A$ 餐厅分数的频率分布直方图，得对 $A$ 餐厅评分低于 30 分的频率为：

$(0.003+0.005+0.012)\times 10=0.2$，

$\therefore$ 对 $A$ 餐厅评分低于 30 的人数为 $100\times 0.2=20$ 人.（4 分）

（2）对 $B$ 餐厅评分在 $[0,10)$ 范围内的有 2 人，设为 $m$、$n$，

对 $B$ 餐厅评分在 $[10,20)$ 范围内的有 3 人，设为 $a$、$b$、$c$，

从这 5 人中随机选出 2 人的选法为：

$mn$、$ma$、$mb$、$mc$、$na$、$nb$、$nc$、$ab$、$ac$、$bc$，共 10 种，

其中恰有 1 人评分在 $[0,10)$ 范围内的选法包括：

$ma$、$mb$、$mc$、$na$、$nb$、$nc$，共 6 种，

故 2 人中恰有 1 人评分在 $[0,10)$ 范围内的概率为 $P=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.（8 分）

（3）从两个餐厅得分低于 30 分的人数所占的比例来看，由（1）得，抽样的 100 人中，

$A$ 餐厅评分低于 30 的人数为 20，

$\therefore A$ 餐厅评分低于 30 分的人数所占的比例为 20%，

$B$ 餐厅评分低于 30 分的人数为 $2+3+5=10$，

$\therefore B$ 餐厅得分低于 30 分的人数所占的比例为 10%，

$\therefore$ 会选择 $B$ 餐厅用餐.（12 分）

20.（1）由题意，$AB$ 斜率不为零，

设 $AB$：$x=\lambda y+\frac{p}{2}$ 代入 $y^2=2px(p>0)$.

$\therefore y^2-2p\lambda y-p^2=0$

设 $A(x_1,y_1)B(x_2,y_2)$，

则 $y_1+y_2=2p\lambda$，$y_1y_2=-p^2$，（2 分）

$S_{\triangle HAB}=\frac{1}{2}p|y_1-y_2|=\frac{1}{2}p\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$=p^2\sqrt{\lambda^2+1}$.（4 分）

$\therefore$ 当 $\lambda=0$ 时，$S_{\triangle HAB}$ 取最小值 $p^2$，

$\therefore p^2=4$，$\therefore p=2$，

抛物线 $C$ 的方程为 $y^2=4x$.（5 分）

（2）假设存在 $E(x_0,y_0)$.

设 $M(x_3,y_3)$，$N(x_4,y_4)$，由题意 $MN$ 的斜率不为零，设 $MN$ 的方程为 $x=t(y-1)+\frac{17}{4}$ 代入 $y^2=4x$ 可得 $y^2-4ty+4t-17=0$

$\therefore y_3+y_4=4t$，$y_3y_4=4t-17$.（7 分）

$\therefore \frac{y_0-y_3}{x_0-x_3}\cdot\frac{y_0-y_4}{x_0-x_4}=1$

$\therefore \frac{4}{y_0+y_3}\cdot\frac{4}{y_0+y_4}=-1$，（8 分）

$\therefore y_0^2+(y_3+y_4)y_0+y_3y_4+16=0$

即 $4t(y_0+1)+y_0^2-1=0$，（10 分）

$\therefore \begin{cases}y_0+1=0\\ y_0^2-1=0\end{cases}$，解得 $y_0=-1$

故存在定点 $E(\frac{1}{4},-1)$ 满足题意.（12 分）

21.（1）$f(x)$ 定义域为 $[0,+\infty)$，

当 $n=0$ 时，$f(x)=e^{x+1}-m\sqrt{x}$，$f'(x)=e^{x+1}-\frac{m}{2\sqrt{x}}$，（1 分）

当 $m\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递增，

$\therefore f(x)\geqslant f(0)=e$.

此时 $f(x)$ 无零点，即 $f(x)$ 的零点个数为 0.（2 分）

$\therefore$ 当 $m>0$ 时，令 $g(x)=e^{x+1}-\frac{m}{2\sqrt{x}}$，

则 $g'(x)=e^{x+1}+\frac{m}{4x^2}>0$

$\therefore g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 为增函数，

又 $x\to 0$ 时，$g(x)\to-\infty$，$x\to+\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$

$\therefore$ 存在 $x_0\in(0,+\infty)$，使得 $g(x_0)=0$，

即 $e^{x_0+1}-\frac{m}{2\sqrt{x_0}}=0$，$m=2e^{x_0+1}\sqrt{x_0}$

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g(x)<0$，即 $f'(x)<0$，

$\therefore f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g(x)>0$，即 $f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$ 单调递增，

$\therefore f(x)_{\min}=f(x_0)=e^{x_0+1}-mx_0^{\frac{1}{2}}=e^{x_0+1}-2x_0e^{x_0+1}$

$=e^{x_0+1}(1-2x_0)$，

当 $1-2x_0=0$，即 $x_0=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)_{\min}=f(x_0)=0$，此时 $m=\sqrt{2e^3}$，$f(x)$ 有 1 个零点，（3 分）

当 $1-2x_0<0$，即 $x_0>\frac{1}{2}$ 时，$f(x)_{\min}=f(x_0)<0$，$m>\sqrt{2e^3}$，

又 $f(0)=e>0$，$x\to+\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 和 $(x_0,+\infty)$ 上各有一个零点，即 $f(x)$ 有 2 个零点；（4 分）

当 $1-2x_0>0$，即 $0<x_0<\frac{1}{2}$ 时，$f(x)_{\min}=f(x_0)>0$，此时 $0<m<\sqrt{2e^3}$，$f(x)$ 无零点，即 $f(x)$ 有 0 个零点；（5 分）

综上所述，当 $m<\sqrt{2e^3}$ 时，$f(x)$ 有 0 个零点；

当 $m=\sqrt{2e^3}$ 时，$f(x)$ 有 1 个零点；

当 $m>\sqrt{2e^3}$ 时，$f(x)$ 有 2 个零点.（6 分）

(2)∵函数 $f(x)$ 有零点，设 $x_1$ 为函数 $f(x)$ 的一个零点，即 $f(x_1)=0$，由(1)知 $x_1>0$，

∴$e^{x_1+1}-m\sqrt{x_1}+n\sin x_1=0$，即 $e^{x_1+1}=m\sqrt{x_1}-n\sin x_1$，

∴$(e^{x_1+1})^2=(m\sqrt{x_1}-n\sin x_1)^2\leqslant(|m|\sqrt{x_1}+|n||\sin x_1|)^2$，(7 分)

令 $h(x)=x-\sin x(x>0)$，∴$h'(x)=1-\cos x\geqslant0$，

∴$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

∴$h(x)>h(0)=0$，即 $x>\sin x$.

当 $x\in(0,1]$ 时，$|\sin x|=\sin x<x$；

$x\in(1,+\infty)$ 时，$|\sin x|\leqslant1<x$，故都有 $|\sin x|<x$，(8 分)

又∵$\sin x\in[0,1]$，故 $\sin^2x\leqslant|\sin x|<x$，故 $|\sin x|<\sqrt{x}$

∴$(|m|\sqrt{x_1}+|n||\sin x_1|)^2<(|m|\sqrt{x_1}+|n|\sqrt{x_1})^2=(|m|+|n|)^2x_1\leqslant2(m^2+n^2)x_1$，(9 分)

∴$m^2+n^2>\dfrac{e^{2x_1+2}}{2x_1}=e^2\cdot\dfrac{e^{2x_1}}{2x_1}$，(10 分)

令 $p(x)=\dfrac{e^{2x}}{2x}(x>0)$，

∴$p'(x)=\dfrac{2e^{2x}\cdot2x-2e^{2x}}{4x^2}=\dfrac{e^{2x}\cdot(2x-1)}{2x^2}$，

令 $p'(x)=0$ 是 $x=\dfrac{1}{2}$，

当 $x\in(0,\dfrac{1}{2})$ 时，$p'(x)<0$，$p(x)$ 单调递减，

当 $x\in(\dfrac{1}{2},+\infty)$ 时，$p'(x)>0$，$p(x)$ 单调递增，

∴$p(x)\geqslant p(x)_{\min}=p(\dfrac{1}{2})=e$，∴$\dfrac{e^{2x}}{2x}\geqslant e$，(11 分)

∴$e^2\cdot\dfrac{e^{2x_1}}{2x_1}\geqslant e^2\cdot e=e^3$，∴$m^2+n^2>e^3$.(12 分)

22.(1)由 $O_1(1,\dfrac{\pi}{2})$，$\angle MOO_1=\dfrac{\pi}{6}$，

可得点 $M$ 的极角为 $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2\pi}{3}$.

在等腰 $\triangle O_1MO$ 中，

由正弦定理得 $\dfrac{|O_1M|}{\sin\angle MOO_1}=\dfrac{|OM|}{\sin\angle MO_1O}$，

即 $\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{|OM|}{\sin\dfrac{2\pi}{3}}$.

∴$|OM|=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，

∴点 $M$ 的极坐标为 $(\sqrt{3},\dfrac{2\pi}{3})$.(5 分)

(2)由题意，在直角坐标系中，点 $M$ 在以 $(0,1)$ 为圆心，1 为半径的半圆弧 $C_1$ 上，

其参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\theta,\\y=1+\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数，且 $\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{3\pi}{2}$).

设线段 $MO_2$ 的中点 $N$ 的坐标为 $(x,y)$，

又由点 $M(\cos\theta,1+\sin\theta)$，$O_2(0,-1)$，

根据中点坐标公式可得 $\begin{cases}x=\dfrac{0+\cos\theta}{2}=\dfrac{1}{2}\cos\theta\\y=\dfrac{-1+1+\sin\theta}{2}=\dfrac{1}{2}\sin\theta\end{cases}$，

∴点 $N$ 的轨迹方程为 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\cos\theta\\y=\dfrac{1}{2}\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数，且 $\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{3\pi}{2}$).

(10 分)

23.(1)$f(x)=|x+5|+2|x+2|=\begin{cases}-3x-9,x\leqslant-5\\-x+1,-5<x<-2\\3x+9,x\geqslant-2\end{cases}$

当 $x\leqslant-5$ 时，$f(x)\geqslant6$；当 $-5<x<-2$ 时，$3<f(x)<6$；

当 $x\geqslant-2$ 时，$f(x)\geqslant3$，

∴当 $x=-2$ 时，$f(x)$ 取最小值 $t=3$.(5 分)

(2)由(1)可知 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{3c}=2$，

∵$a,b,c$ 为正实数，

$\dfrac{a}{9}+\dfrac{2b}{9}+\dfrac{c}{3}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{3c})(\dfrac{a}{9}+\dfrac{2b}{9}+\dfrac{c}{3})$

$=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{3}+(\dfrac{a}{18b}+\dfrac{2b}{9a})+(\dfrac{c}{3a}+\dfrac{a}{27c})+(\dfrac{2b}{27c}+\dfrac{c}{6b})\right]$

$\geqslant\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{9}+\dfrac{2}{9}+\dfrac{2}{9})=\dfrac{1}{2}$.

当且仅当 $a=2b=3c$，即 $a=\dfrac{3}{2}$，$b=\dfrac{3}{4}$，$c=\dfrac{1}{2}$ 时取等号，

∴$\dfrac{a}{9}+\dfrac{2b}{9}+\dfrac{c}{3}\geqslant\dfrac{1}{2}$.(10 分)