九师联盟

2020～2021学年高三2月质量检测巩固卷

数　学(理科)

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集$U=\mathbf{R}$，$A=\left\{x\left|\frac{x+1}{x-4}\geqslant 0\right.\right\}$，则$\complement_U A=$

A. $\{x|-1<x<4\}$　　B. $\{x|x\leqslant -1或x\geqslant 4\}$

C. $\{x|-1\leqslant x\leqslant 4\}$　　D. $\{x|-1<x\leqslant 4\}$

2. 若$\frac{x}{1-\mathrm{i}}=1+y\mathrm{i}$($x,y\in\mathbf{R}$，i为虚数单位)，则$|x-y\mathrm{i}|=$

A. 3　　B. $\sqrt{5}$　　C. 5　　D. $\sqrt{3}$

3. 已知双曲线$C:\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$的一条渐近线方程为$x-2y=0$，则该双曲线的离心率为

A. $\sqrt{2}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

4. 下列命题为假命题的是

A. 若"$p\wedge q$"为真，则"$p\vee q$"为真

B. 若正数a,b满足$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，则$a+b$的最小值为4

C. 两平行线$x+y-1=0$与$2x+2y-3=0$之间的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$

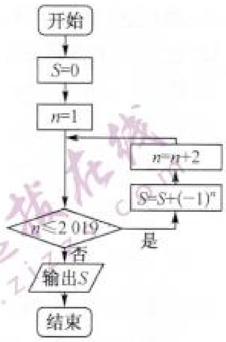
D. "$\forall x>0,\sin x\leqslant x$"的否定是"$\exists x>0,\sin x>x$"

5. 已知$f(x)$是定义在$[-3b,2+b]$上的偶函数，且在$[0,2+b]$上为减函数，则不等式$f(x-1)\leqslant f(2x)$的解集为

A. $\left[-1,\frac{2}{3}\right]$　　B. $\left[-1,\frac{1}{3}\right]$

C. $[-1,1]$　　D. $\left[\frac{1}{3},1\right]$

6. 若执行如图所示的程序框图，则输出 S 的值是

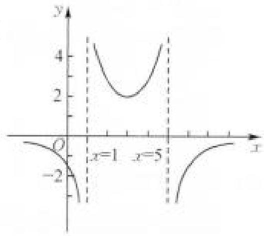


A. $-1\ 009$
B. $-1\ 010$
C. $-1\ 011$
D. $-1\ 012$

7. 我国古代数学名著《算法统宗》中有如下问题："远望巍巍塔七层，红光点点倍加增，共灯三百八十一，请问尖头几盏灯？"意思是："一座 7 层塔共挂了 381 盏灯，且相邻两层中的下一层灯数是上一层灯数的 2 倍，则塔的顶层共有灯多少？"现有类似问题：一座 5 层塔共挂了 242 盏灯，且相邻两层中的下一层灯数是上一层灯数的 3 倍，则塔的底层共有灯

A. 81 盏　　B. 112 盏
C. 114 盏　　D. 162 盏

8. 已知函数 $f(x)=\dfrac{d}{ax^2+bx+c}$ $(a,b,c,d\in \mathbf{R})$ 的图象如图所示，则下列判断正确的是

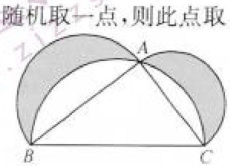


A. $a>0,b>0,c<0,d>0$
B. $a<0,b>0,c<0,d>0$
C. $a<0,b>0,c>0,d>0$
D. $a>0,b<0,c>0,d>0$

9. 设 $\omega>0$，函数 $y=2\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{7}\right)-1$ 的图象向右平移 $\frac{4\pi}{3}$ 个单位后与原图象重合，则 ω 的最小值是

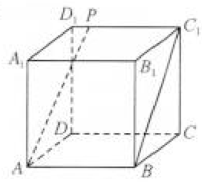
A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{4}{3}$　　D. $\frac{3}{4}$

10. 下图来自古希腊数学家希波克拉底所研究的几何图形，此图由三个半圆构成，三个半圆的直径分别为直角三角形 ABC 的斜边 BC，直角边 AB、AC. 若 $AB=4$，$AC=3$，在整个图形中随机取一点，则此点取自阴影部分的概率为($\pi\approx 3$)



A. $\frac{16}{41}$　　B. $\frac{16}{25}$
C. $\frac{25}{41}$　　D. $\frac{23}{25}$

11. 已知在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为线段 C_1D_1 上的动点，则直线 BC_1 与直线 AP 所成角余弦值的范围是



A. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$　　B. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$
C. $\left[\frac{\sqrt{6}}{3},1\right]$　　D. $\left[\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

12. 过抛物线 $y^2=16x$ 焦点 F 的直线 l 与抛物线相交于 A，B 两点，若以线段 AB 为直径的圆与直线 $x=13$ 相切，则直线 l 的方程为

A. $y=4x-16$ 或 $y=-4x+16$　　B. $y=2\sqrt{2}x-8\sqrt{2}$ 或 $y=-2\sqrt{2}x+8\sqrt{2}$
C. $y=2x-8$ 或 $y=-2x+8$　　D. $y=x-4$ 或 $y=-x+4$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,-1)$，$\boldsymbol{b}=(\sin\theta,\cos\theta)$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\tan\theta=$________.

14. 若 $(1+\sin x)^n$ 的二项展开式中 $\sin^3 x$ 的系数为 4，则 n 的值为________.

15. 已知边长为 2 的 $\triangle ABC$ 的各顶点均在体积为 $4\sqrt{3}\pi$ 的球面上，则该球面上的点到平面 ABC 距离的最大值为________.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n>0$，$a_1\times a_2\times\cdots\times a_n=\sqrt{a_1^{n+1}\times a_{n+1}^{n-1}}$，若 $a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant 2^n-1$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立，则 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 的取值范围是________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共 60 分。

17. (本小题满分 12 分)

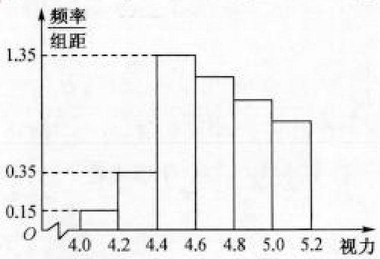
已知在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $\sin^2 A+\sqrt{3}\sin A\cos A-\frac{3}{2}=0$.

(1)求角 A 的大小；

(2)若 $b=1,c=2$，求 a.

18. (本小题满分 12 分)

某学校研究性学习小组对该校高三年级学生的视力情况进行调查，从高三年级的全体 1 000 名学生的体检表中随机抽取了 100 名学生的体检表，将这 100 名学生的视力数据分成六组：[4.0,4.2)，[4.2,4.4)，[4.4,4.6)，[4.6,4.8)，[4.8,5.0)，[5.0,5.2]，且得到如图所示的不完全频率分布直方图.



是否近视 \ 年级名次	1～50	951～1 000
近视	41	32
不近视	9	18

(1)学习小组成员发现，学习成绩突出的学生中近视的比较多. 为了研究学生的视力与学生的学习成绩的关系，学习小组对年级名次在 1～50 名和 951～1 000 名的学生进行调查得到数据如表所示，根据表中的数据，能否在犯错的概率不超过 0.05 的前提下有 95%的把握认为学生的视力与学生的学习成绩有关？

(2)在(1)被调查的 100 名学生中，按照年级名次 1～50，951～1 000 分组用分层抽样方法在不近视的学生中抽取了 9 人，为进一步调查他们良好的护眼习惯，在这 9 人中任取 4 人，记名次在 1～50 的学生人数为 X，求 X 的分布列及数学期望.

附：

$P(K^2\geqslant k)$	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
k	2.706	3.841	5.624	6.635	7.879

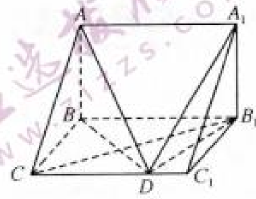
$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}(n=a+b+c+d)$.

19.（本小题满分 12 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp AB$，$AA_1\perp AC$，$AB\perp BC$，$CD=4DC_1$，$AB=BC=1$，$CC_1=\frac{5}{2}$.

（1）证明：$B_1D\perp$ 平面 ABD；

（2）求二面角 $A-A_1D-B_1$ 的正弦值.



20.（本小题满分 12 分）

已知在平面直角坐标系 xOy 中，M 为单位圆上一动点，点 H 在 x 轴上，且 MH 垂直于 x 轴，$\overrightarrow{HM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{HN}$.

（1）求点 N 的轨迹 C 的方程；

（2）在（1）条件下，设圆 O：$x^2+y^2=\frac{4}{5}$，直线 l：$y=kx+m$ 与圆 O 相切，且交轨迹 C 于 A，B 两点，直线 OA，OB 的斜率分别为 k_1，k_2，则 k_1k_2 是否为定值？若是，求出这一定值；若不是，请说明理由.

21.（本小题满分 12 分）

函数 $f(x)=x^2+m\ln(1+x)$.

（1）当 $m>0$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，证明：$2f(x_2)>-x_1+2x_1\ln 2$.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.（本小题满分 10 分）**选修 4－4：坐标系与参数方程**

以直角坐标系的原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴，建立极坐标系. 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=t\cos\varphi,\\ y=2+t\sin\varphi\end{cases}$（$t$ 为参数，$0\leqslant\varphi<\pi$），曲线 C 的极坐标方程为 $\rho\cos^2\theta=8\sin\theta$.

（1）求直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程；

（2）设直线 l 与曲线 C 相交于 A，B 两点，当 φ 变化时，求 $|AB|$ 的最小值.

23.（本小题满分 10 分）**选修 4－5：不等式选讲**

已知 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=2$. 证明：

（1）$\frac{1}{a}+\frac{9}{b}\geqslant 8$；

（2）$a^4+b^4\geqslant 2$.

2020～2021 学年高三 2 月质量检测巩固卷·数学(理科)

参考答案、提示及评分细则

1. D　$\because U=\mathbf{R}, A=\left\{x \left| \frac{x+1}{x-4} \geqslant 0\right.\right\}=\{x \mid x \leqslant -1$ 或 $x>4\}$, $\therefore \complement_U A=\{x \mid -1<x \leqslant 4\}$. 故选 D.

2. B　$\because \frac{x}{1-\mathrm{i}}=1+y\mathrm{i}$, $\therefore \frac{x(1+\mathrm{i})}{1^2-\mathrm{i}^2}=1+y\mathrm{i}$, $\therefore x+x\mathrm{i}=2+2y\mathrm{i}$, $\therefore x=2$, 且 $y=1$, $\therefore |x-y\mathrm{i}|=|2-\mathrm{i}|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$. 故选 B.

3. D　据题意，得 $\frac{|a|}{|b|}=\frac{1}{2}$，所以所求双曲线的离心率 $e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2+4a^2}{a^2}}=\sqrt{5}$. 故选 D.

4. C　若“$p \wedge q$”为真，则 p,q 都为真，所以“$p \vee q$”为真；$a+b=(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b} \geqslant 4$，B 成立；D 显然成立；两平行线 $x+y-1=0$ 与 $2x+2y-3=0$ 之间的距离为 $\frac{1}{\sqrt{4+4}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，故 C 不成立.

5. B　$\because f(x)$ 是定义在 $[-3b,2+b]$ 上的偶函数，$\therefore -3b+(2+b)=0$，解得 $b=1$，即函数的定义域为 $[-3,3]$. $\because$ 函数在 $[0,3]$ 上为减函数，且 $f(x-1) \leqslant f(2x)$，$\therefore |2x| \leqslant |x-1| \leqslant 3$，解得 $-1 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}$. 故选 B.

6. B　$S=0, n=1; S=0+(-1)^1, n=1+2=3; S=(-1)^1+(-1)^3, n=5; S=(-1)^1+(-1)^3+(-1)^5, n=7; \cdots; S=(-1)^1+(-1)^3+(-1)^5+\cdots+(-1)^{2019}, n=2\,021$，此时不满足 $n \leqslant 2\,019$，循环结束，输出 S 的值是 $-1\,010$. 故选 B.

7. D　由题可知，灯数自上而下成公比为 3 的等比数列，记该数列为 $\{a_n\}$，由 $\frac{a_1(1-3^5)}{1-3}=242$，得 $a_1=2$，所以 $a_5=2\times 3^4=162$.

8. B　由图象可知，$x \neq 1$ 且 $x \neq 5$. $\because ax^2+bx+c \neq 0$，可知 $ax^2+bx+c=0$ 的两根为 1，5，由韦达定理得 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=6$，$x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}=5$，$\therefore a,b$ 异号，a,c 同号，又 $\because f(0)=\frac{d}{c}<0$，$\therefore c,d$ 异号，只有选项 B 符合题意. 故选 B.

9. A　将 $y=2\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{7}\right)-1$ 的图像向右平移 $\frac{4\pi}{3}$ 个单位后对应的函数为 $y=2\cos\left(\omega\left(x-\frac{4\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{7}\right)-1=2\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{7}-\frac{4\omega\pi}{3}\right)-1$，所以有 $\frac{4\omega\pi}{3}=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $\omega=\frac{3k}{2}$，又因为 $\omega>0$，所以 $k \geqslant 1$，故 $\omega=\frac{3k}{2} \geqslant \frac{3}{2}$.

10. A　以 BC 为直径的圆面积为 $\pi\left(\frac{BC}{2}\right)^2$，以 AB 为直径的圆面积为 $\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2$，以 AC 为直径的圆面积为 $\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2$. 所以图形总面积 $S=\frac{3^2}{4}\pi\times\frac{1}{2}+\frac{4^2}{4}\pi\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 3\times 4=\frac{25\pi}{8}+6$，$S_{阴影}=S-\frac{1}{2}\pi\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2=6$，所以 $P=\frac{S_{阴影}}{S}=\frac{6}{\frac{25\pi}{8}+6}=\frac{16}{41}$.

11. C　设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1. 以 DA,DC,DD_1 分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，则有 $A(1,0,0)$，$B(1,1,0)$，$C_1(0,1,1)$. 设 $P(0,t,1)(0 \leqslant t \leqslant 1)$，则 $\overrightarrow{AP}=(-1,t,1)$，$\overrightarrow{BC_1}=(-1,0,1)$，所以 $\cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{BC_1}\rangle=\frac{-1\times(-1)+t\times 0+1\times 1}{\sqrt{(-1)^2+t^2+1^2}\times\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}}=\sqrt{\frac{2}{t^2+2}}$. 又因为 $0 \leqslant t \leqslant 1$，所以 $\frac{\sqrt{6}}{3} \leqslant \cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{BC_1}\rangle \leqslant 1$. 故选 C.

12. A　当直线 l 垂直与 x 轴时，$\begin{cases} y^2=16x, \\ x=4, \end{cases}$ 解得 $y=\pm 8$，以 AB 为直径的圆为 $(x-4)^2+y^2=64$ 与直线 $x=13$ 相离，故直线 $x=4$ 不满足题意；当直线 l 的斜率存在时，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 l 的方程为 $y=k(x-4)(k\neq 0)$，则 $\begin{cases} y=k(x-4), \\ y^2=16x, \end{cases}$ 化简得 $k^2x^2-(8k^2+16)x+16k^2=0$，$x_1+x_2=8+\frac{16}{k^2}$，$x_1x_2=16$. 圆的半径为 $\frac{|AB|}{2}=\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{p}{2}=8$

$+\frac{8}{k^2}$，圆心到直线 $x=13$ 的距离为 $13-\frac{x_1+x_2}{2}=9-\frac{8}{k^2}=8+\frac{8}{k^2}$，解得 $k=\pm4$，故直线 l 的方程为 $y=4x-16$ 或 $y=-4x+16$．故选 A．

13．1　∵$\boldsymbol{a}=(1,-1)$，$\boldsymbol{b}=(\sin\theta,\cos\theta)$，∴$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times\sin\theta-1\times\cos\theta=\sin\theta-\cos\theta$．又∵$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，∴$\sin\theta-\cos\theta=0$，∴$\sin\theta=\cos\theta$，∴$\tan\theta=1$．

14．4　$(1+\sin x)^n$ 的二项展开式中第 $r+1$ 项 $T_{r+1}=C_n^r\cdot1^{n-r}\cdot(\sin x)^r=C_n^r\cdot(\sin x)^r$，令 $r=3$，则 $T_4=C_n^3\cdot(\sin x)^3$．据题意知，$C_n^3=4$，所以 $n=4$．

15．$\frac{\sqrt{15}}{3}+\sqrt{3}$　设球的半径为 R，则 $\frac{4}{3}\pi R^3=4\sqrt{3}\pi$，所以 $R=\sqrt{3}$，所以球心到平面 ABC 的距离 $d=\sqrt{(\sqrt{3})^2-\left(\sqrt{2^2-1^2}\times\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{3}$，所以球面上的点到平面 ABC 距离的最大值为 $\frac{\sqrt{15}}{3}+\sqrt{3}$．

16．$(0,2]$　∵$a_1\times a_2\times\cdots\times a_n=\sqrt{a_1^{n+1}\times a_{n+1}^{n-1}}$，$a_n>0$，∴$a_1\times a_2\times\cdots\times a_n\times a_{n+1}=\sqrt{a_1^{n+2}\times a_{n+2}^{n}}$，∴$a_{n+1}^2=\frac{a_1^{n+2}\times a_{n+2}^n}{a_1^{n+1}\times a_{n+1}^{n-1}}$，∴$a_{n+1}^2=a_1\times\frac{a_{n+2}^n}{a_{n+1}^{n-1}}$，∴$a_{n+1}^{n+1}=a_1\times a_{n+2}^n$，∴$a_{n+2}^{n+2}=a_1\times a_{n+3}^{n+1}$，∴$\frac{a_{n+2}^{n+2}}{a_{n+1}^{n+1}}=\frac{a_{n+3}^{n+1}}{a_{n+2}^n}$，∴$a_{n+2}^{2n+2}=a_{n+1}^{n+1}\times a_{n+3}^{n+1}$，∴$a_{n+2}^2=a_{n+1}\times a_{n+3}$．又分析知，$a_2^2=a_1\times a_3$，∴数列$\{a_n\}$为等比数列．讨论：当 $0<\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant2$ 时，∵$a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant2^n-1$ 对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$ 成立，∴$0<a_1\leqslant1$，∴$a_1q^{n-1}\leqslant q^{n-1}\leqslant2^{n-1}\left(q=\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$，即 $a_n\leqslant2^{n-1}$，∴$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n\leqslant1+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}$，∴$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n\leqslant\frac{1\times(1-2^n)}{1-2}$，∴$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n\leqslant2^n-1$，符合题设，∴$0<\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant2$ 满足条件；当 $\frac{a_{n+1}}{a_n}>2$ 时，$\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\leqslant2^n-1\left(q=\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$，∴$a_1q^n\leqslant(q-1)\times2^n+a_1-q+1$．∵$q>2$，$0<a_1\leqslant1$，∴$a_1-q+1<0$，∴$a_1q^n<(q-1)\times2^n$，即 $\left(\frac{q}{2}\right)^n<\frac{q-1}{a_1}$．又∵$\frac{q}{2}>1$，∴$n<\log_{\frac{q}{2}}\frac{q-1}{a_1}$，这与 $n\in\mathbf{N}^*$ 矛盾，∴$q>2$ 不满足条件．综上，$\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 的取值范围是 $(0,2]$．

17．解：(1)∵$\sin^2A+\sqrt{3}\sin A\cos A-\frac{3}{2}=0$，

∴$\frac{1-\cos2A}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2A-\frac{3}{2}=0$，…………………… 2 分

∴$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2A-\frac{1}{2}\cos2A=1$，

∴$\sin\left(2A-\frac{\pi}{6}\right)=1$，…………………… 4 分

∴$2A-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

∴$A=k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$．…………………… 6 分

又∵$0<A<\pi$，

∴$A=\frac{\pi}{3}$．…………………… 7 分

(2)据(1)求解知，$A=\frac{\pi}{3}$．

又∵$b=1$，$c=2$，

∴$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ …………………… 9 分

$=1^2+2^2-2\times1\times2\times\cos\frac{\pi}{3}$

$=3$，……………………

$\therefore a=-\sqrt{3}$(舍)或 $a=\sqrt{3}$. ……………………………………………………………… 12分

18.解:(1)$K^2=\dfrac{100\times(41\times18-32\times9)^2}{50\times50\times73\times27}$ …………………………………………………… 2分

$=\dfrac{300}{73}$ ……………………………………………………………………………………………… 3分

≈4.110. ……………………………………………………………………………………………… 4分

因为 $4.110>3.841$,

所以在犯错误的概率不超过0.05的前提下有95%的把握认为学生的视力与学生的学习成绩有关系.

…… 5分

(2)据题意知,9人中年级名次在1～50名和951～1 000名的人数分别为3人和6人,

所以 X 的所有可能取值为0,1,2,3. ……………………………………………………………………… 6分

$P(X=0)=\dfrac{C_3^0C_6^3}{C_9^3}=\dfrac{5}{42}$, ………………………………………………………………… 7分

$P(X=1)=\dfrac{C_3^1C_6^2}{C_9^3}=\dfrac{10}{21}$, ……………………………………………………………… 8分

$P(X=2)=\dfrac{C_3^2C_6^1}{C_9^3}=\dfrac{5}{14}$, ………………………………………………………………… 9分

$P(X=3)=\dfrac{C_3^3C_6^0}{C_9^3}=\dfrac{1}{21}$, ……………………………………………………………… 10分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{42}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{21}$

…… 11分

所以 $E(X)=0\times\dfrac{5}{42}+1\times\dfrac{10}{21}+2\times\dfrac{5}{14}+3\times\dfrac{1}{21}=\dfrac{4}{3}$. …………………………………… 12分

19.证明:(1)因为 $CD=4DC_1$,$CC_1=\dfrac{5}{2}$,

所以 $CD=2$,$DC_1=\dfrac{1}{2}$. ……………………………………………………………………………… 1分

又因为 $AB=BC=1$,据三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 性质知,$BC=B_1C_1$,

所以$\dfrac{B_1C_1}{DC_1}=\dfrac{CD}{BC}$,得$\dfrac{CD}{BC}=\dfrac{B_1C_1}{DC_1}$. ………………………………………………………… 2分

因为 $AA_1\perp AB$,$AA_1\perp AC$,$AB\cap AC=A$,$AB\subset$平面 ABC,$AC\subset$平面 ABC,

所以 $AA_1\perp$平面 ABC,

所以三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱,

所以$\angle B_1C_1D=\angle DCB=90^\circ$, ………………………………………………………………… 3分

所以$\triangle B_1C_1D\sim\triangle DCB$,

所以$\angle B_1DC_1=\angle DBC$,

所以$\angle B_1DC_1+\angle BDC=\angle DBC+\angle BDC=90^\circ$,

所以 $BD\perp B_1D$. …………………………………………………………………………………………… 4分

据直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 性质知,$BB_1\perp AB$,

又 $AB\perp BC$,$BB_1\cap BC=B$,$BB_1\subset$平面 BCC_1B_1,$BC\subset$平面 BCC_1B_1,所以 $AB\perp$平面 BCC_1B_1. ………… 5分

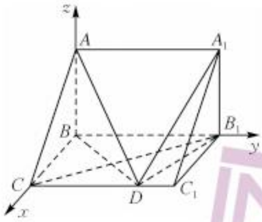
又 $B_1D\subset$平面 BCC_1B_1,

所以 $AB\perp B_1D$.

又 $BD\cap AB=B$，$BD\subset$平面 ABD，$AB\subset$平面 ABD，

所以 $B_1D\perp$平面 ABD. ………………………………………………………………………… 6 分

解：(2) 以 BC，BB_1，BA 分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，



则有 $D(1,2,0)$，$A_1\left(0,\frac{5}{2},1\right)$，$B_1\left(0,\frac{5}{2},0\right)$，$A(0,0,1)$，

所以 $\overrightarrow{DA_1}=\left(-1,\frac{1}{2},1\right)$，$\overrightarrow{DB_1}=\left(-1,\frac{1}{2},0\right)$，$\overrightarrow{DA}=(-1,-2,1)$. ……………………………… 7 分

设平面 A_1DB_1 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA_1}=(x,y,z)\cdot\left(-1,\frac{1}{2},1\right)=-x+\frac{1}{2}y+z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB_1}=(x,y,z)\cdot\left(-1,\frac{1}{2},0\right)=-x+\frac{1}{2}y=0,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}z=0,\\ y=2x.\end{cases}$$

令 $x=1$，得平面 A_1DB_1 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(1,2,0)$； ……………………………………… 9 分

设平面 A_1DA 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(x',y',z')$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DA_1}=(x',y',z')\cdot\left(-1,\frac{1}{2},1\right)=-x'+\frac{1}{2}y'+z'=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DA}=(x',y',z')\cdot(-1,-2,1)=-x'-2y'+z'=0,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}y'=0,\\ z'=x'.\end{cases}$$

令 $x'=1$，得平面 A_1DA 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(1,0,1)$，……………………………………… 11 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{(1,2,0)\cdot(1,0,1)}{\sqrt{5}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，

故二面角 $A-A_1D-B_1$ 的正弦值为$\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$. …………………………………………… 12 分

20. 解：(1) 设点 N 的坐标为 (x,y).

又∵MH 垂直于 x 轴，$\overrightarrow{HM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{HN}$，

$\therefore M\left(x,\frac{1}{2}y\right)$. ……………………………………………………………………… 2 分

又∵M 在单位圆上，

$\therefore x^2+\frac{y^2}{4}=1$. ……………………………………………………………………… 3 分

∴轨迹 C 的方程为 $x^2+\frac{y^2}{4}=1(y\neq0)$. ……………………………………………… 4 分

(2) ∵直线 l：$y=kx+m$ 与圆 O：$x^2+y^2=\frac{4}{5}$ 相切，

$\therefore\dfrac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore k^2=\frac{5}{4}m^2-1$. ……………………………………………………………………

据$\begin{cases}x^2+\dfrac{y^2}{4}=1,\\ y=kx+m,\end{cases}$ 得$(4+k^2)x^2+2kmx+m^2-4=0$.

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,则$x_1+x_2=-\dfrac{2km}{k^2+4},x_1x_2=\dfrac{m^2-4}{k^2+4}$, ………… 7分

$\therefore y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)$

$=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2$

$=\dfrac{k^2(m^2-4)}{k^2+4}-\dfrac{2k^2m^2}{k^2+4}+\dfrac{m^2(k^2+4)}{k^2+4}$

$=\dfrac{-4k^2+4m^2}{k^2+4}$, ………… 9分

$\therefore k_1k_2=\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2}=\dfrac{\frac{-4k^2+4m^2}{k^2+4}}{\frac{m^2-4}{k^2+4}}=\dfrac{-4k^2+4m^2}{m^2-4}=\dfrac{-4\left(\frac{5}{4}m^2-1\right)+4m^2}{m^2-4}=-1$. ………… 11分

故k_1k_2为定值,且该定值为-1. ………… 12分

21. 解:$f(x)$的定义域是$(-1,+\infty)$,$f'(x)=\dfrac{2x^2+2x+m}{1+x}$.

(1)令$g(x)=2x^2+2x+m$,这是开口向上,以$x=-\dfrac{1}{2}$为对称轴的抛物线.

当$x>-1$时,

① 当$g(-\dfrac{1}{2})=-\dfrac{1}{2}+m\geqslant0$,即$m\geqslant\dfrac{1}{2}$时,$g(x)\geqslant0$,即$f'(x)\geqslant0$在$(-1,+\infty)$上恒成立. ………… 1分

②当$0<m<\dfrac{1}{2}$时,

由$g(x)=2x^2+2x+m=0$得$x_1=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{1-2m}}{2},x_2=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{1-2m}}{2}$. ………… 2分

因为$g(-1)=m>0$,所以$-1<x_1=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{1-2m}}{2}<-\dfrac{1}{2}$,当$x_1<x<x_2$时,$g(x)<0$,即$f'(x)<0$,

当$-1<x<x_1$或$x>x_2$时,$g(x)>0$,即$f'(x)>0$. ………… 4分

综上,当$0<m<\dfrac{1}{2}$时,$f(x)$在$(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{1-2m}}{2},-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{1-2m}}{2})$上递减,

在$(-1,-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{1-2m}}{2})$和$(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{1-2m}}{2},+\infty)$上递增;当$m\geqslant\dfrac{1}{2}$时,$f(x)$在$(-1,+\infty)$上递增. ………… 5分

(2)若函数$f(x)$有两个极值点x_1,x_2,且$x_1<x_2$,

则必有$0<m<\dfrac{1}{2}$,且$-1<x_1<-\dfrac{1}{2}<x_2<0$,

且$f(x)$在(x_1,x_2)上递减,在$(-1,x_1)$和$(x_2,+\infty)$上递增,

则$f(x_2)<f(0)=0$. ………… 6分

因为x_1,x_2是$2x^2+2x+m=0$的两根,

所以$\begin{cases}x_1+x_2=-1\\ x_1x_2=\dfrac{m}{2}\end{cases}$,即$x_1=-1-x_2,m=2x_1x_2$.

要证$2f(x_2)>-x_1+2x_1\ln 2$成立,只需证

$2f(x_2)=2x_2^2+2m\ln(1+x_2)=2x_2^2+4x_1x_2\ln(1+x_2)$

$=2x_2^2-4(1+x_2)x_2\ln(1+x_2)>-(-1-x_2)+2(-1-x_2)\ln 2$

$=1+x_2-2(1+x_2)\ln 2$，

即证 $2x_2^2-4(1+x_2)x_2\ln(1+x_2)-(1+x_2)(1-2\ln 2)>0$ 对 $-\frac{1}{2}<x_2<0$ 恒成立. …………………… 9分

设 $\varphi(x)=2x^2-4(1+x)x\ln(1+x)-(1+x)(1-2\ln 2)\ (-\frac{1}{2}<x<0)$，

则 $\varphi'(x)=-4(1+2x)\ln(1+x)+\ln\frac{4}{e}$，

当 $-\frac{1}{2}<x<0$ 时，$1+2x>0$，$\ln(1+x)<0$，$\ln\frac{4}{e}>0$，故 $\varphi'(x)>0$，…………………… 10分

故 $\varphi(x)$ 在 $(-\frac{1}{2},0)$ 上递增，

故 $\varphi(x)>\varphi(-\frac{1}{2})=2\times\frac{1}{4}-4\times\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})\times\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times(1-2\ln 2)=0$，…………………… 11分

所以 $2x_2^2-4(1+x_2)x_2\ln(1+x_2)-(1+x_2)(1-2\ln 2)>0$ 对 $-\frac{1}{2}<x_2<0$ 恒成立，

故 $2f(x_2)>-x_1+2x_1\ln 2$. …………………… 12分

22. 解：(1) 由 $\begin{cases}x=t\cos\varphi\\ y=2+t\sin\varphi\end{cases}$ 消去 t 得 $x\sin\varphi-y\cos\varphi+2\cos\varphi=0$，…………………… 1分

所以直线 l 的普通方程为 $x\sin\varphi-y\cos\varphi+2\cos\varphi=0$. …………………… 2分

由 $\rho\cos^2\theta=8\sin\theta$，得 $(\rho\cos\theta)^2=8\rho\sin\theta$，…………………… 3分

把 $x=\rho\cos\varphi$，$y=\rho\sin\varphi$ 代入上式，得 $x^2=8y$，

所以曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2=8y$. …………………… 5分

(2) 将直线 l 的参数方程代入 $x^2=8y$，得 $t^2\cos^2\varphi-8t\sin\varphi-16=0$，…………………… 6分

设 A、B 两点对应的参数分别为 t_1，t_2，

则 $t_1+t_2=\frac{8\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$，$t_1t_2=-\frac{16}{\cos^2\varphi}$，…………………… 7分

所以 $|AB|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{\frac{64\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi}+\frac{64}{\cos^2\varphi}}=\frac{8}{\cos^2\varphi}$. …………………… 9分

当 $\varphi=0$ 时，$|AB|$ 的最小值为 8. …………………… 10分

23. 证明：(1) 因为 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=2$，

所以 $\frac{1}{a}+\frac{9}{b}=\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{9}{b})(a+b)=\frac{1}{2}(10+\frac{b}{a}+\frac{9a}{b})\geqslant\frac{1}{2}(10+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{9a}{b}})=8$，…………………… 3分

当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{9a}{b}$ 时，即 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{3}{2}$ 时取等号. …………………… 4分

所以 $\frac{1}{a}+\frac{9}{b}\geqslant 8$. …………………… 5分

(2) 因为 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，所以 $2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2$，

所以 $2(a^4+b^4)\geqslant(a^2+b^2)^2\geqslant[\frac{1}{2}(a+b)^2]^2=4$，…………………… 8分

即 $a^4+b^4\geqslant 2$，当且仅当 $a=b=1$ 时取等号. …………………… 9分

所以 $a^4+b^4\geqslant 2$. …………………… 10分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》