郴州市2023届高三第三次教学质量监测试卷
数学参考答案及评分细则

一、选择题（本题共8个小题,每小题5分,共40分,在每小题给出的4个选项中,只有一项是符合要求的）

1-5 DBCDC　　6-8 DCA

二、多项选择题（本题共4个小题,每题5分,共20分,在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求,全部选对得5分,部分选对得2分,有选错的得0分）

9. BCD　10. BC　11. CD　12. AC

三、填空题（本题共4小题,每小题5分,共20分）

13. $\frac{1}{2}$　14. $2\sqrt{13}-2$　15. $\frac{2}{3}\pi$　16. $[\frac{1}{e},+\infty)$

四、解答题（本题共6小题,共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分10分）

（Ⅰ）由正弦定理或余弦定理不难证明 $a\cdot\cos C+c\cdot\cos A=b$

代入条件可得 $(b-2a)\cos C+c\cos B=0$ ……………………（2分）

由正弦定理得 $\sin B\cos C-2\sin A\cos C+\sin C+\cos B=0$

$\therefore \sin(B+C)-2\sin A\cos C=0$

$\therefore \sin A-2\sin A\cos C=0$

$\because \sin A\neq 0$, $\therefore \cos C=\frac{1}{2}$ ……………………（4分）

$\because C\in(0,\pi)$, $\therefore C=\frac{\pi}{3}$. ……………………（5分）

（Ⅱ）因为 $\angle ACB=60°$, $\angle ACB$ 的平分线交 AB 于点 D,

所以 $\angle ACD=\angle BCD=30°$,

由三角形的面积公式可得 $\frac{1}{2}ab\sin 60°=\frac{1}{2}a\times1\cdot\sin 30°+\frac{1}{2}b\cdot1\cdot\sin 30°$,

化简得 $\sqrt{3}ab=a+b$, ……………………（7分）

又 $a>0,b>0$,所以$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sqrt{3}$,

则 $3a+b=\frac{\sqrt{3}}{3}(3a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=\frac{\sqrt{3}}{3}(4+\frac{3a}{b}+\frac{b}{a})\geqslant\frac{\sqrt{3}}{3}(4+2\sqrt{3})=\frac{4\sqrt{3}}{3}+2$,

………………………………………………………………………………………… (9 分)

当且仅当 $b=\sqrt{3}a$ 时取等号，故 $3a+b$ 的最小值为$\frac{4\sqrt{3}}{3}+2$. ……………… (10 分)

18.(本小题满分 12 分)

(Ⅰ)证明 $\because E,F$ 分别是 PC,PB 的中点,$\therefore BC/\!/EF$ $\therefore BC/\!/$平面 AEF

$\because BC\subset$平面 ABC,平面 $AEF\cap$平面 $ABC=l$,$\therefore BC/\!/l$. ………………………… (2 分)

$\because$ 平面 $PAC\perp$平面 ABC,平面 $PAC\cap$平面 $ABC=AC,BC\perp AC$,

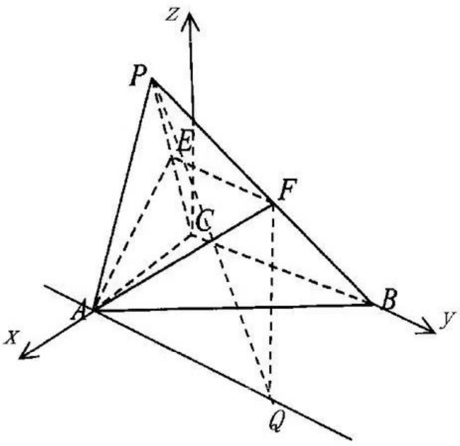
$\therefore BC\perp$平面 PAC. ………………………………………………………………… (3 分)

$\therefore l\perp$平面 PAC …………………………………………………………………… (4 分)

(Ⅱ)$\because EF$ 是$\triangle PAB$ 的中位线，$\therefore V_{P-ABC}=4V_{P-AEF}$ ……………………………… (5 分)

又 $V_{P-AEFQ}=V_{P-AEF}+V_{P-AQF}$,当 $V_{P-AEFQ}=V_{P-ABC}$时,$V_{P-AQF}=3V_{P-AEF}$ …………………… (6 分)

又因为 $EF/\!/AQ$ 故此时 $AQ=3EF=6$ (7 分)



以 C 为原点，直线 CA 为 x 轴，直线 CB 为 y 轴,过点 C 且垂直于平面 ABC 的直线为 z 轴,建立空间直角坐标系,则 $P(1,0,\sqrt{3})$, $A(2,0,0)$,$B(0,4,0)$,$Q(2,6,0)$

$\overrightarrow{PA}=(1,0,-\sqrt{3})$, $\overrightarrow{AQ}=(0,6,0)$,

$\overrightarrow{PB}=(-1,4,\sqrt{3})$, $\overrightarrow{BQ}=(2,2,0)$ (8 分)

令平面 PAQ 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PA}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AQ}=0\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}x-\sqrt{3}z=0\\ y=0\end{cases}$ 令 $z=1$ 则 $\vec{n}=(\sqrt{3},0,1)$ …………………… (9 分)

令平面 PQB 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PB}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BQ}=0\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}-x+4y-\sqrt{3}z=0\\ 2x+2y=0\end{cases}$ 令 $x=-1$ 则 $\vec{m}=(-1,1,\frac{5\sqrt{3}}{3})$ …… (10 分)

因为$|\cos<\vec{n},\vec{m}>|=\frac{\sqrt{31}}{31}$,所以二面角 $A-PQ-B$ 的余弦值为$-\frac{\sqrt{31}}{31}$. …… (12 分)

19. (本小题满分 12 分)

(Ⅰ)解法 1 (从终值来考虑) 若全款购置, 则 25 万元 10 年后的价值

$25(1+2.5\%)^{10}\approx 32.00$ (万元) …………………………………………………… (2 分)

若分期付款,每年初所付金额 3 万元,10 年后的总价值为

$S=3(1+2.5\%)^{10}+3(1+2.5\%)^{9}+\cdots+3(1+2.5\%)\approx 34.44$ (万元). ………………… (5 分)

因此,付全款较好.

解法 2 (从现值来考虑)每年初付租金 3 万元的 10 年现值之和为

$$Q=3+\frac{3}{1+2.5\%}+\frac{3}{(1+2.5\%)^2}+\cdots+\frac{3}{(1+2.5\%)^9}$$

$\Rightarrow 1.025^{10}Q=3\times1.025\left(\frac{1-1.025^{10}}{1-1.025}\right)$ ………………………………………… (6 分)

$$\Rightarrow Q\approx\frac{3\times41\times0.28}{1.28}\approx 26.91\ (\text{万元})$$

比购置一次付款 25 万元多, 故购置设备的方案较好.

(Ⅱ)由题意,设小明第十年房租到期后小明所获得全部租金的终值为 T 万元,

$T=2(1+2.5\%)^{10}+2.1(1+2.5\%)^{9}+\cdots+2.9(1+2.5\%)$ ……………………………… (8 分)

记 $1+2.5\%=q$, $a_n=-0.1n+3$, 则

$T=a_1q+a_2q^2+\cdots+a_{10}q^{10}$ ……………………………(1)

$qT=a_1q^2+a_2q^3+\cdots+a_9q^{10}+a_{10}q^{11}$ ……………………(2)

作差可得: $(1-q)T=2.9q-0.1(q^2+q^3+\cdots+q^{10})-2q^{11}$

$\Rightarrow T=3q-0.1(q+q^2+q^3+\cdots+q^{10})-2q^{11}$ ………………………………………… (10 分)

$\Rightarrow T=3\cdot\frac{q}{1-q}-0.1\cdot\frac{q(1-q^{10})}{(1-q)^2}-2\cdot\frac{q^{11}}{1-q}\approx 27.88$ (万元). ……………………… (12 分)

20. (本小题满分 12 分)

(Ⅰ)由题意, $\frac{b^2}{a}=c$, 又因为 $b^2=a^2-c^2$,

故 $a^2-c^2-ac=0$, 即 $1-e^2-e=0$, 解得 $e=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (舍负) ……………………………… (4 分)

(Ⅱ)证明: 设椭圆 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$, $F_1(-c,0)$, $F_1(c,0)$.

由题意知双曲线 C_2 的方程为 $\frac{x^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. ………………………………………… (5 分)

联立 C_1,C_2 的方程,解之得 $\begin{cases} x=\pm\dfrac{\sqrt{2}\,ac}{\sqrt{a^2+c^2}} \\ y=\pm\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+c^2}}, \end{cases}$.

不失一般性,可设 A 在第一象限,所以点 $A(\dfrac{\sqrt{2}\,ac}{\sqrt{a^2+c^2}},\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+c^2}})$. ………… (7 分)

$|AF_1'|=\sqrt{(\dfrac{\sqrt{2}\,ac}{\sqrt{a^2+c^2}}+a)^2+(\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+c^2}})^2}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+c^2}}\sqrt{(\sqrt{2}\,c+\sqrt{a^2+c^2})^2a^2+b^4}$.

同理,$|AF_2'|=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+c^2}}\sqrt{(\sqrt{2}\,c-\sqrt{a^2+c^2})^2a^2+b^4}$. …………………………… (9 分)

$|F_1'F_2'|=2a$.

$|AF_1'|^2+|AF_2'|^2-|F_1'F_2'|^2=\dfrac{2c^2(c^2-a^2)}{a^2+c^2}$.

$|AF_1'|\cdot|AF_2'|=\dfrac{(a^2-c^2)(2a^2+c^2)}{a^2+c^2}$.

$\cos\beta=\dfrac{|AF_1'|^2+|AF_2'|^2-|F_1'F_2'|^2}{2|AF_1'||AF_2'|}=-\dfrac{c^2}{2a^2+c^2}$. 同理,$\cos\alpha=\dfrac{a^2}{a^2+2c^2}$

因为 C_2 的离心率为 $e_2=\dfrac{a}{c}$,则 $\cos\beta=-\dfrac{1}{2e_2^2+1}$.

C_1 的离心率为 $e_1=\dfrac{c}{a}$, 则 $\cos\alpha=\dfrac{1}{2e_1^2+1}$

$\cos\alpha\cdot\cos\beta=-\dfrac{1}{(2e_1^2+1)(2e_2^2+1)}$. ………………………………………………… (11 分)

又 $e_1=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, $e_2=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$,所以 $\cos\alpha\cdot\cos\beta=-\dfrac{1}{11}$. ……………………… (12 分)

21. (本小题满分 12 分)

(Ⅰ)由题意该单个样本的交叉熵损失函数:

$Loss=-\sum_{i=1}^{n}y_i\ln\hat{y}_i=-1\times\ln 0.7=-\ln\dfrac{7}{10}=\ln\dfrac{10}{7}=\ln 2+\ln 5-\ln 7\approx 0.356$ ……………… (4 分)

(Ⅱ)根据定义该三阶变量的绝对值误差为

$MAE=\dfrac{1}{3}\cdot[(a+b+1-c)+(c+1-a+b)+(1-b+c+a)]=\dfrac{1}{3}(3-a+b+c)=\dfrac{4}{3}$ ………… (8 分)

(Ⅲ)记事件 A:chatGPT 中输入的语法无错误;事件 B:chatGPT 中输入的语法有错误;

事件 C: chatGPT 的回答被采纳.依题意:

$P(A)=0.95, P(B)=0.05, P(C|A)=0.9, P(C|B)=0.5$

$P(A|C)=\frac{P(AC)}{P(C)}=\frac{P(A)P(C|A)}{P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)}=\frac{0.95\times0.9}{0.95\times0.9+0.05\times0.5}\frac{171}{176}$ (12 分)

22. (本小题满分 12 分)

解:(Ⅰ)由题意,当 $a=1$ 时,设 $h(x)=f(x)-g(x)$,

则$h(x)=x^2-x+1-\ln x-1=x^2-x-\ln x(x>0)$,

$h'(x)=2x-1-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-x-1}{x}=\frac{(2x+1)(x-1)}{x}$,

令 $h'(x)=0$,得 $x=1$ (舍负) …… (2 分)

$h(x)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增,

$\therefore h(x)_{\min}=h(1)=0$. …… (4 分)

根据题意 t 的取值范围为$(0,1]$. …… (5 分)

(Ⅱ)设函数 $f(x)$在点$(x_1, f(x_1))$处与函数 $g(x)$在点$(x_2, g(x_2))$处有相同的切线,

则 $f'(x_1)=g'(x_2)=\frac{f(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}$, $\therefore 2x_1-a=\frac{1}{x_2}=\frac{x_1^2-ax_1+1-\ln x_2-a}{x_1-x_2}$, …… (6 分)

$\therefore x_1=\frac{1}{2x_2}+\frac{a}{2}$,代入$\frac{x_1-x_2}{x_2}=x_1^2-ax_1+1-\ln x_2-a$

得$\frac{1}{4x_2^2}+\frac{a}{2x_2}+\ln x_2+\frac{a^2}{4}+a-2=0$.

$\therefore$问题转化为:关于 x 的方程$\frac{1}{4x^2}+\frac{a}{2x}+\ln x+\frac{a^2}{4}+a-2=0$ 有解, …… (7 分)

设 $F(x)=\frac{1}{4x^2}+\frac{a}{2x}+\ln x+\frac{a^2}{4}+a-2(x>0)$,则函数 $F(x)$有零点,

$\because F(x)=\frac{1}{4}(\frac{1}{x}+a)^2+\ln x+a-2$,当 $x=e^{2-a}$ 时,$\ln x+a-2=0$,$\therefore F(e^{2-a})>0$.

$\therefore$问题转化为:$F(x)$的最小值小于或等于 0.

$F'(x)=-\frac{1}{2x^3}-\frac{a}{2x^2}+\frac{1}{x}=\frac{2x^2-ax-1}{2x^3}$,

设 $2x_0^2-ax_0-1=0(x_0>0)$,则

当 $0<x<x_0$ 时,$F'(x)<0$,当 $x>x_0$ 时,$F'(x)>0$.

$\therefore F(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，在$(x_0,+\infty)$上单调递增，

$\therefore F(x)$的最小值为 $F(x_0)=\frac{1}{4x_0^2}+\frac{a}{2x_0}+\ln x_0+\frac{a^2}{4}+a-2.$

由 $2x_0^2-ax_0-1=0$ 知 $a=2x_0-\frac{1}{x_0}$，故 $F(x_0)=x_0^2+2x_0-\frac{1}{x_0}+\ln x_0-2.$ ………………… (9 分)

设 $\varphi(x)=x^2+2x-\frac{1}{x}+\ln x-2(x>0)$，

则 $\varphi'(x)=2x+2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}>0$，故 $\varphi(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

$\because \varphi(1)=0$，$\therefore$ 当 $x\in(0,1]$时，$\varphi(x)\leq 0$，

$\therefore F(x)$的最小值 $F(x_0)\leq 0$ 等价于 $0\leq x_0\leq 1.$ ………………………………… (11 分)

又 $\because$ 函数 $y=2x-\frac{1}{x}$在$(0,1]$上单调递增，$\therefore a=2x_0-\frac{1}{x_0}\in(-\infty,1].$ …………… (12 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线