

高三数学考试

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 R 是实数集,集合 $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 3\}$, $B = \{x \mid 2x^2 - x - 3 > 0\}$, 则 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) =$
 A. $\{-1, 0\}$ B. $\{-1, 0, 1\}$
 C. $\{0, 1, 2\}$ D. $\{-1, 0, 1, 2\}$
2. 已知复数 $z = (a - 2i)(1 + 3i)$ ($a \in \mathbb{R}$) 的实部与虚部的和为 12, 则 $|z - 5| =$
 A. 3 B. 4 C. 5 D. 6
3. 若 x, y, z 为非零实数, 则“ $x < y < z$ ”是“ $x + y < 2z$ ”的
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 已知 $a = \log_2 2$, $b = 2^{0.1}$, $c = 0.5^{2.1}$, 则
 A. $c < a < b$ B. $a < c < b$ C. $b < a < c$ D. $a < b < c$
5. 已知 m, n 是两条不重合的直线, α, β 是两个不重合的平面, 下列说法正确的是
 A. 若 $m \parallel \alpha, n \parallel \alpha$, 则 $m \parallel n$ B. 若 $\alpha \parallel \beta, m \perp \alpha, n \parallel \beta$, 则 $m \parallel n$
 C. 若 $m \parallel \alpha, m \perp \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$ D. 若 $\alpha \perp \beta, m \parallel \alpha, n \parallel \beta$, 则 $m \perp n$
6. 已知 M 为抛物线 $C: x^2 = 2py$ ($p > 0$) 上一点, 点 M 到 C 的焦点的距离为 7, 到 x 轴的距离为 5, 则 $p =$
 A. 3 B. 4 C. 5 D. 6
7. 已知 $\tan \alpha = 2$, 则 $\frac{\cos^3 \alpha - \cos \alpha}{\cos(\alpha + \frac{\pi}{2})} =$
 A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{2}$
8. 第 24 届冬季奥运会将于 2022 年 2 月 4 日至 2022 年 2 月 20 日在北京市和河北省张家口举行。现要安排甲、乙、丙、丁四名志愿者去国家高山滑雪馆, 国家速滑馆, 首钢滑雪大跳台个场馆参加活动, 要求每个场馆都有人去, 且这四人都在这三个场馆, 则甲和乙都没被安排首钢滑雪大跳台的方案种数为
 A. 12 B. 14 C. 16 D. 18

二、选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.

9. 北京天坛圜丘坛的地面由石板铺成,最中间的是圆形的天心石,围绕天心石的是9圈扇环形的石板,从内到外各圈的石板数依次为 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$, 设数列 $\{a_n\}$ 为等差数列,它的前 n 项和为 S_n , 且 $a_2 = 18, a_1 + a_9 = 90$, 则



A. $a_1 = 6$

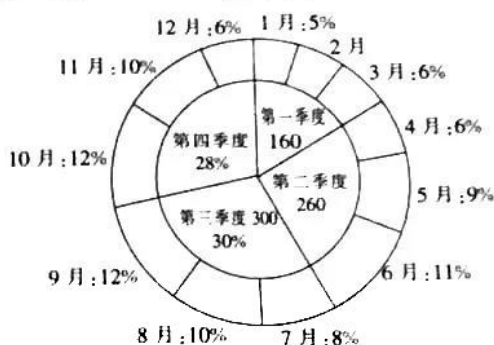
B. $a_9 = 3a_1$

C. $\{a_n\}$ 的公差为 9

D. $S_9 = 405$

Handwritten notes: $a_1 + 8d = 18$
 $a_1 + 3d + a_1 + 5d = 90$

10. 某保险公司销售某种保险产品,根据2020年全年该产品的销售额(单位:万元)和该产品的销售额占总销售额的百分比,绘制出如图所示的双层饼图. 根据双层饼图,下列说法正确的是



A. 2020年第四季度的销售额为280万元

B. 2020年上半年的总销售额为500万元

C. 2020年2月份的销售额为40万元

D. 2020年12个月的月销售额的众数为60万元

11. 在四边形 $ABCD$ 中(如图1所示), $AB = AD$,

$\angle ABD = 45^\circ, BC = BD = CD = 2$, 将四边形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折成四面体 $A'BCD$ (如图2所示), 使得 $\angle A'BC = 90^\circ$, E, F, G 分别为棱 $BC, A'D, A'B$

的中点, 连接 EF, CG , 则下列结论正确的是

A. $A'C \perp BD$

B. 直线 EF 与 CG 所成角的余弦值为 $\frac{4\sqrt{5}}{15}$

C. C, E, F, G 四点共面

D. 四面体 $A'BCD$ 外接球的表面积为 8π

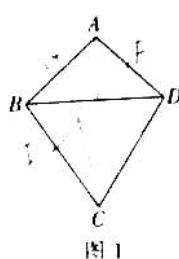


图1

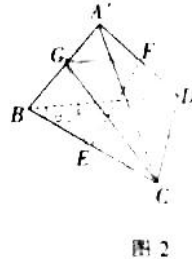


图2

12. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 左、右顶点分别为 A_1, A_2 ,

P 为双曲线的左支上一点, 且直线 PA_1 与 PA_2 的斜率之积等于 3, 则下列说法正确的是

A. 双曲线 C 的离心率为 2

B. 若 $PF_1 \perp PF_2$, 且 $S_{\triangle PF_1F_2} = 3$, 则 $a = 2$

C. 以线段 PF_1, A_1A_2 为直径的两个圆外切

D. 若点 P 在第二象限, 则 $\angle PF_1A_2 = 2\angle PA_2F_1$

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知 $f(x)$ 是奇函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) = -\ln(ax)$. 若 $f(-e^2) = 2$, 则 $a =$

14. 已知向量 $a = (1, -\sqrt{7}), |b| = 3, a \cdot b = 3\sqrt{6}$, 则 a 与 b 的夹角为 .

15. 函数 $f(x) = -x^2 + \frac{1}{x}$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线的斜率为 .

16. 若函数 $y = \tan(\omega x + \frac{\pi}{4})$ 在 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ 上单调递减, 且在 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ 上的最大值为 $\sqrt{3}$, 则 $\omega =$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 2，且 $a_1, 2+a_2, 4+a_3$ 成等比数列。数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_n = 2^n - 1$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $c_n = a_n b_n$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

18. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，已知 $a \cos C + c \cos A = \sqrt{3}$ ， $a = \sqrt{2}b$ ，记 $\triangle ABC$ 的面积为 S 。

(1) 求 a 。

(2) 请从下面的三个条件中任选一个，探究满足条件的 $\triangle ABC$ 的个数，并说明理由。

条件：① $S = \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2 + c^2 - b^2)$ ，② $b \cos A + \frac{\sqrt{2}}{2}a = c$ ，③ $b \sin A = a \cos(B - \frac{\pi}{6})$ 。

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分。

19. (12 分)

某中学组织一支“雏鹰”志愿者服务队，带领同学们利用周末的时间深入居民小区开展一些社会公益活动。现从参加了环境保护和社会援助这两项社会公益活动的志愿者中，随机抽取男生 80 人，女生 120 人进行问卷调查（假设每人只参加环境保护和社会援助中的一项），整理数据后得到如下统计表：

	女生	男生	合计
环境保护	80 a	40 b	120
社会援助	40 c	40 d	80
合计	120	80	200

(1) 能否有 99% 的把握认为学生参加社会公益活动所选取的项目与学生性别有关？

(2) 以样本的频率作为总体的概率，若从本校所有参加社会公益活动的女生中随机抽取 4

【高三数学 第 3 页(共 4 页)】

人,记这4人中参加环境保护的人数为 X ,求 X 的分布列和期望.

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,其中 $n=a+b+c+d$.

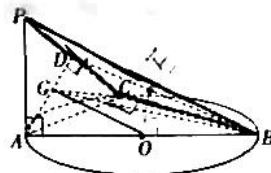
$P(K^2 \geq k_0)$	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	5.024	6.635	7.879	10.828

21. (12分)

如图, AB 是圆 O 的直径, $PA \perp$ 圆 O 所在的平面, C 为圆周上一点, D 为线段 PC 的中点, $\angle CBA = 30^\circ$, $AB = 2PA$.

(1)证明:平面 $ABD \perp$ 平面 PBC .

(2)若 G 为 AD 的中点,求二面角 $P-BC-G$ 的余弦值.



22. (12分)

已知 O 为坐标原点,椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上顶点为 A ,右顶点为 B , $\triangle AOB$ 的面积为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,原点 O 到直线 AB 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(1)求椭圆 C 的方程;

(2)过 C 的左焦点 F 作弦 DE, MN ,这两条弦的中点分别为 P, Q ,若 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$,求 $\triangle FPQ$ 面积的最大值.

23. (12分)

已知函数 $f(x) = \ln x + 2, g(x) = \frac{1}{a}e^{2x} - \ln \frac{2}{a} (a > 0)$.

(1)设函数 $h(x) = f(x+1) - x - 2$,求 $h(x)$ 的最大值.

(2)证明: $f(x) \leq g(x)$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

