高三数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若复数 z 满足 $(1+i)z=|1+i|$，则 z 的虚部为

A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}i$　　B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $-\sqrt{2}$

2. 已知全集 $U=A\cup B=(0,2]$，$A\cap \complement_U B=(1,2]$，则 $B=$

A. $(0,1]$　　B. $(0,2)$　　C. $(0,1)$　　D. $\varnothing$

3. 某密码锁的一个密码由3位数字组成，每一位均可取0，1，2，…，9这10个数字中的一个。小明随机设置了一个密码，则恰有两个位置数字相同的概率为

A. 0.09　　B. 0.12

C. 0.18　　D. 0.27

4. 若 $3^x=4^y=10$，$z=\log_x y$，则

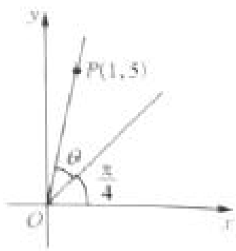
A. $x>y>z$　　B. $y>x>z$　　C. $z>x>y$　　D. $x>z>y$

5. 若 $(2x+1)^n$ 的展开式中 x^3 的系数为160，则正整数 n 的值为

A. 4　　B. 5

C. 6　　D. 7

6. 在平面直角坐标系 xOy 中，角 θ 的大小如图所示，则 $9\sin^2\theta+\sin 2\theta=$



A. 1　　B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{48}{13}$　　D. $\frac{5}{2}$

7. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $C: x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 F，P 是 C 上位于第一象限内的一点，若 C 在点 P 处的切线与 x 轴交于 M 点，与 y 轴交于 N 点，则与 $|PF|$ 相等的是

A. $|MN|$　　B. $|FN|$　　C. $|PM|$　　D. $|ON|$

8. 已知函数 $f(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x$，当 $x>1$ 时，$f(x^2)>8\lambda f(x)$ 恒成立，则实数 λ 的取值范围为

A. $(-\infty,-2]$　　B. $(-\infty,2]$　　C. $(-\infty,-1]$　　D. $(-\infty,1]$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知函数 $f(x)=0.5^{\sin x+\cos x}$，则

A. $f(x)$是以 2π 为周期的周期函数

B. 直线 $x=\frac{3\pi}{4}$是 $f(x)$图象的一条对称轴

C. $f(x)$的值域为$[2^{-\sqrt{2}},2^{\sqrt{2}}]$

D. $f(x)$在$\left[\pi,\frac{5\pi}{4}\right]$上单调递增

10. 折扇是我国古老文化的延续，在我国已有四千年左右的历史，"扇"与"善"谐音，折扇也寓意"善良""善行"。它常以字画的形式体现我国的传统文化，也是运筹帷幄、决胜千里、大智大勇的象征（如图 1）。图 2是一个圆台的侧面展开图（扇形的一部分），若两个圆弧$\overset{\frown}{DE}$、$\overset{\frown}{AC}$所在圆的半径分别是 3 和 9，且$\angle ABC=120^\circ$，则该圆台的

图 1

图 2

A. 高为 $4\sqrt{2}$

B. 体积为$\frac{50\sqrt{2}}{3}\pi$

C. 表面积为 34π

D. 上底面积、下底面积和侧面积之比为 1 ∶ 9 ∶ 22

11. 已知 S_n 是数列$\{a_n\}$的前 n 项和，且 $a_1=1,a_2=5,a_{n+2}=2a_{n+1}+8a_n$，则

A. 数列$\{a_{n+1}-4a_n\}$为等比数列

B. 数列$\{a_{n+1}+2a_n\}$为等比数列

C. $a_9=\frac{7\times4^8+2^8}{6}$

D. $S_9=\frac{7\times4^9-2^9-5}{18}$

12. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为 F，左、右顶点分别为 A_1,A_2，则

A. 过点 A_2 与 C 只有一个公共点的直线有 2 条

B. 若 C 的离心率为$\sqrt{5}$，则点 F 关于 C 的渐近线的对称点在 C 上

C. 过 F 的直线与 C 右支交于 M,N 两点，则线段 MN 的长度有最小值

D. 若 C 为等轴双曲线，点 P 是 C 上异于顶点的一点，且$|A_1A_2|=|PA_2|$，则$\angle PA_1A_2=\frac{\pi}{6}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知$\triangle ABC$是边长为 1 的等边三角形，设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，则$|3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$__________.

14. 若函数 $f(x)=a^x+b^x(a>0,b>0,a\neq1,b\neq1)$是偶函数，则$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}$的最小值为__________.

15. 利用分层随机抽样的方法，调研某校高二年级学生某次数学测验的成绩（满分 100 分），获得样本数据的特征量如下表：

	人数	平均成绩	方差
男生	32	70	16
女生	8	80	36

则总样本的平均分为__________，方差为__________.

参考公式：n 个数 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$ 的平均数为 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$，方差为 $s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n}[(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)-n\bar{x}^2]$；

参考数据：$8(36+80^2)+32(16+70^2)-40\times72^2=1\ 440$.

16. 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1=2$，$AB=\sqrt{3}$，平面 α 经过点 A，且满足直线 AA_1 与平面 α 所成的角为 30°，过点 A_1 作平面 α 的垂线，垂足为 H，则 BH 长度的取值范围为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

在①a_1,a_3,a_5 成等比数列，②$\dfrac{S_n}{a_n}=\dfrac{n+1}{2}$，③$S_6=2S_3+4$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并完成解答.

问题：在公差不为 0 的等差数列$\{a_n\}$中，其前 n 项和为 S_n，$a_4=16$，________，是否存在正整数 k，使得 $S_k<2a_k+20$？若存在，求出所有的正整数 k；若不存在，请说明理由.

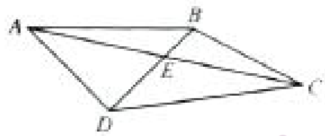
注：如果选择多个条件分别进行解答，按第一个解答进行计分.

18.（本小题满分 12 分）

在平面四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 交于点 E，$\angle ABD=45^\circ$，$AE=EC$，$DE=2BE$，$AB=6$，$AD=3\sqrt{2}$.

(1)求 AC 的长；

(2)求 $\sin\angle ADC$ 的值.



19.（本小题满分 12 分）

某省为调查北部城镇 2021 年国民生产总值，抽取了 20 个城镇进行分析，得到样本数据$(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,20)$，其中 x_i 和 y_i 分别表示第 i 个城镇的人口（单位：万人）和该城镇 2021 年国民生产总值（单位：亿元），计算得 $\sum\limits_{i=1}^{20}x_i=100$，$\sum\limits_{i=1}^{20}y_i=800$，$\sum\limits_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})^2=70$，$\sum\limits_{i=1}^{20}(y_i-\bar{y})^2=280$，$\sum\limits_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=120$.

(1)请用相关系数 r 判断该组数据中 y 与 x 之间线性相关关系的强弱（若 $|r|\in[0.75,1]$，相关性较强；若 $|r|\in[0.30,0.75)$，相关性一般；若 $r\in[-0.25,0.25]$，相关性较弱）；

(2)求 y 关于 x 的线性回归方程；

(3)若该省北部某城镇 2021 年的人口约为 5 万人，根据(2)中的线性回归方程估计该城镇 2021 年的国民生产总值.

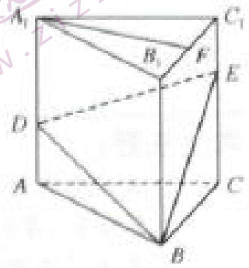
参考公式：相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$，对于一组具有线性相关关系的数据$(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$，其回归直线 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$

20.（本小题满分 12 分）

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC\perp BC$，$AC=BC=2$，$CC_1=3$，点 D，E 分别在棱 AA_1 和棱 CC_1 上，且 $AD=1$，$CE=2$.

(1)设 F 为 B_1C_1 中点，求证：A_1F // 平面 BDE；

(2)求直线 A_1B_1 与平面 BDE 所成角的正弦值.



21.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-\sqrt{2},0)$，$F_2(\sqrt{2},0)$，且 C 过点 $E(\sqrt{2},1)$.

(1)求 C 的方程；

(2)设 A 为椭圆 C 的右顶点，直线 l 与椭圆 C 交于 P，Q 两点，且 P，Q 均不是 C 的左、右顶点，M 为 PQ 的中点. 若 $\dfrac{|AM|}{|PQ|}=\dfrac{1}{2}$，试探究直线 l 是否过定点？若过定点，求出该定点坐标；若不过定点，请说明理由.

22.（本小题满分 12 分）

已知 $a\geqslant 0$，函数 $f(x)=ax+\dfrac{1+a}{x}-\ln x$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2)如果我们用 $n-m$ 表示区间 (m,n) 的长度，试证明：对任意实数 $a\geqslant 1$，关于 x 的不等式 $f(x)<2a+1$ 的解集的区间长度小于 $2a+1$.

高三数学参考答案、提示及评分细则

1. B 由 $(1+i)z=|1+i|=\sqrt{2}$，得 $z=\frac{\sqrt{2}}{1+i}=\frac{\sqrt{2}(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$，所以 z 的虚部为 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 B.

2. A 因为 $U=A\cup B=(0,2]$，$A\cap \complement_U B=(1,2]$，所以 $B=(0,1]$. 故选 A.

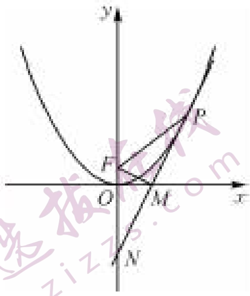
3. D 先从 3 个位置中选 1 个，从 0 到 9 这 10 个数字中选一个数字放入，剩下的两个位置再从剩下的 9 个数字中选一个数字放入(两个位置数字相同)，有 $C_3^1C_{10}^1C_9^1=270$ 种方法，所以所求概率 $P=\frac{270}{10^3}=0.27$. 故选 D.

4. A 因为 $3^x=4^y=10$，则 $x=\log_3 10>\log_3 9=2$；$1=\log_4 4<y=\log_4 10<\log_4 16=2$，则 $1<y<2$，所以 $x>y>1$，从而 $z=\log_x y<\log_x x=1$，所以 $x>y>z$. 故选 A.

5. C $(2x+1)^n$ 的展开式中含 x^3 项为 $C_n^{n-3}(2x)^3\cdot 1^{n-3}=8C_n^3x^3$，所以 $8C_n^3=160\Rightarrow\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=20\Rightarrow n(n-1)(n-2)=6\times5\times4$，则 $n=6$ 满足. 故选 C.

6. C 由题图知 $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=5$，则 $\tan\theta=\frac{2}{3}$，所以 $9\sin^2\theta+\sin 2\theta=\frac{9\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{9\tan^2\theta+2\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=\frac{48}{13}$. 故选 C.

7. B 如图，设 $P\left(a,\frac{a^2}{2p}\right)(a>0)$，由 $y=\frac{x^2}{2p}$，得 $y'=\frac{x}{p}$，所以 C 在点 P 处的切线方程为 $y-\frac{a^2}{2p}=\frac{a}{p}(x-a)$，从而 $M\left(\frac{a}{2},0\right)$，$N\left(0,-\frac{a^2}{2p}\right)$，根据抛物线的定义，得 $|PF|=\frac{a^2}{2p}+\frac{p}{2}$；又 $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$，$|FN|=\frac{p}{2}-\left(-\frac{a^2}{2p}\right)=\frac{a^2}{2p}+\frac{p}{2}$，所以 $|PF|=|FN|>|ON|$；由 $P\left(a,\frac{a^2}{2p}\right)$，$M\left(\frac{a}{2},0\right)$，$N\left(0,-\frac{a^2}{2p}\right)$，得 M 是 PN 的中点，则 $MF\perp PN$，从而 $|PF|>|PM|=|MN|$. 故选 B.



8. D 设 $g(x)=f(x^2)-8\lambda f(x)=x^2-\frac{1}{x^2}-2\ln x^2-8\lambda\left(x-\frac{1}{x}-2\ln x\right)$，$x\in(1,+\infty)$，则 $g'(x)=2x+\frac{2}{x^3}-\frac{4}{x}-8\lambda\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\right)=\frac{2(x-1)^2[x^2+(2-4\lambda)x+1]}{x^3}$. 令 $\varphi(x)=x^2+(2-4\lambda)x+1$，其图象为开口向上、对称轴为直线 $x=2\lambda-1$ 的抛物线. ①当 $2\lambda-1\leqslant1$，即 $\lambda\leqslant1$ 时，$\varphi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，且 $\varphi(x)>\varphi(1)=4-4\lambda\geqslant0$，所以 $g'(x)>0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，于是 $g(x)>g(1)=0$ 恒成立；②当 $2\lambda-1>1$，即 $\lambda>1$ 时，因为 $(2-4\lambda)^2-4=16\lambda^2-16\lambda>0$ 且 $\varphi(1)=4-4\lambda<0$，所以存在 $x_0\in(1,+\infty)$，使得 $x\in(1,x_0)$ 时，$\varphi(x)<0$，所以 $g'(x)<0$ 在 $(1,x_0)$ 上恒成立，即 $g(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递减，所以 $g(x)<g(1)=0$，不满足题意. 综上，实数 λ 的取值范围是 $(-\infty,1]$. 故选 D.

9. ACD 对于 A，因为 $f(x+2\pi)=0.5^{\sin(x+2\pi)+\cos(x+2\pi)}=0.5^{\sin x+\cos x}=f(x)$，所以 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，则 A 正确；对于 B，$f(x)=0.5^{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$，设 $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，由 $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，则 B 错误；对于 C，$y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的值域为 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，则 $f(x)$ 的值域为 $[2^{-\sqrt{2}},2^{\sqrt{2}}]$，则 C 正确；对于 D，$y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，由 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $\frac{\pi}{4}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{4}+2k\pi$，所以 $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 在

$\left[\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right]$($k\in\mathbf{Z}$)上单调递减,所以 $f(x)$ 在区间$\left[\pi,\frac{5\pi}{4}\right]$上单调递增,则 D 正确. 故选 ACD.

10. AC　设圆台的上底面半径为 r,下底面半径为 R,则 $2\pi r=\frac{1}{3}\times2\pi\times3$,$2\pi R=\frac{1}{3}\times2\pi\times9$,解得 $r=1$,$R=3$. 圆台的母线长 $l=6$,圆台的高为 $h=\sqrt{6^2-(3-1)^2}=4\sqrt{2}$,则 A 正确;圆台的体积$=\frac{1}{3}\pi\times4\sqrt{2}\times(3^2+3\times1+1^2)=\frac{52\sqrt{2}}{3}\pi$,则 B 错误;圆台的上底面积为 π,下底面积为 9π,侧面积为 $\pi(1+3)\times6=24\pi$,则圆台的表面积为 $\pi+9\pi+24\pi=34\pi$,则 C 正确;上底面积、下底面积和侧面积之比为 $1:9:24$,则 D 错误. 故选 AC.

11. AB　由 $a_{n+2}=2a_{n+1}+8a_n$,得 $a_{n+2}-4a_{n+1}=-2a_{n+1}+8a_n=-2(a_{n+1}-4a_n)$,$a_2-4a_1=5-4=1$,则数列$\{a_{n+1}-4a_n\}$是首项为 1、公比为 -2 的等比数列,则 A 正确;由 $a_{n+2}=2a_{n+1}+8a_n$,得 $a_{n+2}+2a_{n+1}=4a_{n+1}+8a_n=4(a_{n+1}+2a_n)$,$a_2+2a_1=5+2=7$,则数列$\{a_{n+1}+2a_n\}$是首项为 7、公比为 4 的等比数列,则 B 正确;$a_{n+1}-4a_n=(-2)^{n-1}$,$a_{n+1}+2a_n=7\times4^{n-1}$,相减可得 $a_n=\frac{7\times4^{n-1}-(-2)^{n-1}}{6}$,所以 $a_9=\frac{7\times4^8-2^8}{6}$,则 C 错误;$S_9=\frac{7\times1-1}{6}+\frac{7\times4-(-2)}{6}+\frac{7\times4^2-(-2)^2}{6}+\frac{7\times4^3-(-2)^3}{6}+\cdots+\frac{7\times4^8-(-2)^8}{6}=\frac{7\times4^9-2^9-8}{18}$,则 D 错误. 故选 AB.

12. BCD　对于 A,过 A_2 与 C 只有一个公共点的直线,与渐近线平行的直线 2 条,与 x 轴垂直的直线 1 条,共 3 条,则 A 错误;对于 B,$e^2=\frac{c^2}{a^2}=5$,$c^2=5a^2=a^2+b^2$,$b^2=4a^2$,所以 $c=\sqrt{5}a$,$b=2a$,$F(\sqrt{5}a,0)$,渐近线方程不妨取 $y=\frac{b}{a}x$,即 $2x-y=0$,设 F 关于渐近线 $2x-y=0$ 的对称点为(m,n),则$\begin{cases}\frac{n}{m-\sqrt{5}a}\times2=-1,\\2\times\frac{m+\sqrt{5}a}{2}-\frac{n}{2}=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=\frac{-3a}{\sqrt{5}},\\n=\frac{4a}{\sqrt{5}},\end{cases}$代入 C 的方程,得
$\frac{\left(\frac{-3a}{\sqrt{5}}\right)^2}{a^2}-\frac{\left(\frac{4a}{\sqrt{5}}\right)^2}{4a^2}=\frac{9}{5}-\frac{4}{5}=1$,所以点 F 关于双曲线 C 的渐近线的对称点在双曲线 C 上,则 B 正确;对于 C,过双曲线 C 右焦点 F 的直线与双曲线右支交于 M,N 两点,当直线 MN 与 x 轴垂直时,线段 MN 长度最小,故 C 正确;对于 D,双曲线 C 为等轴双曲线,即 $C:x^2-y^2=a^2(a>0)$,设 $P(x_0,y_0)(y_0\neq0)$,则 $x_0^2-y_0^2=a^2$①,又$|A_1A_2|=|PA_2|$,则$(x_0-a)^2+y_0^2=4a^2$②,联立①②解得 $x_0=2a$,$y_0=\pm\sqrt{3}a$,易得$\angle PA_1A_2=\frac{\pi}{6}$,故 D 正确. 故选 BCD.

13. $\sqrt{7}$　法一:$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,则$|\overrightarrow{BC}|=|\boldsymbol{b}|=1$,$|\boldsymbol{a}|=1$,而$|\overrightarrow{AC}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=1$,两边平方,可得 $2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$,$|3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=9+6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+1=7$,所以$|3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}$.

法二:因为$|3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|^2=4\overrightarrow{AB}^2+4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2=4+2+1=7$,所以$|3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}$.

14. 4　由 $f(x)$ 为偶函数可得 $f(-x)=f(x)$,即$\frac{1}{a^x}+\frac{1}{b^x}=a^x+b^x$,所以$(a^x+b^x)[(ab)^x-1]=0$. 因为 $x\in\mathbf{R}$,且 $a>0$,$b>0$,$a\neq1$,$b\neq1$,所以 $ab=1$,则$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=ab\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)=b+4a\geqslant2\sqrt{4ab}=4$,当且仅当 $b=4a$,即 $a=\frac{1}{2}$,$b=2$ 时,$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}$取最小值 4.

15. 72(2 分)　36(3 分)　总样本的平均分为 $\bar{x}=\frac{32}{32+8}\times70+\frac{8}{32+8}\times80=72$. 设 32 名男生数学测验的成绩分别为 x_1,

$x_2,x_3,\cdots,x_{32}$，8 名女生数学测验的成绩分别为 $x_{33},x_{34},\cdots,x_{40}$，则男生数学测验成绩的方差为 $s_1^2=\frac{1}{32}[(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{32}^2)-32\times70^2]=16$，解得 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{32}^2=32(16+70^2)$；女生数学测验成绩的方差为 $s_2^2=\frac{1}{8}[(x_{33}^2+x_{34}^2+\cdots+x_{40}^2)-8\times80^2]=36$，解得 $x_{33}^2+x_{34}^2+\cdots+x_{40}^2=8(36+80^2)$，故总样本的方差为 $s^2=\frac{1}{40}[(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{32}^2)+(x_{33}^2+x_{34}^2+\cdots+x_{40}^2)-40\times\bar{x}^2]=\frac{1}{40}[32(16+70^2)+8(36+80^2)-40\times72^2]=36$.

16. $[\sqrt{3},3]$　因为 $A_1H\perp$ 平面 α，连接 AH，则 $A_1H\perp AH$，故 H 在以 AA_1 为直径的球面上. 又 AA_1 与平面 α 所成的角为 $30°$，所以 $\angle HAA_1=30°$，过 H 作 $HO_1\perp AA_1$ 于点 O_1，如图 1 所示，则易得 $HA_1=1$，$HA=\sqrt{3}$，$HO_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 H 在如图 2 所示的圆锥 AO_1 的底面圆周上，其轨迹是以 O_1 为圆心，$O_1H=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 为半径的圆，在 $\triangle ABH$ 中，$AB=HA=\sqrt{3}$，又易得 $60°\leqslant\angle BAH\leqslant120°$，由余弦定理，得 $BH^2=AB^2+AH^2-2AB\cdot AH\cdot\cos\angle BAH=6-6\cos\angle BAH\in[3,9]$，即 $BH\in[\sqrt{3},3]$.

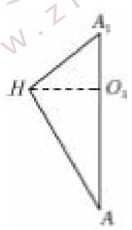


图 1

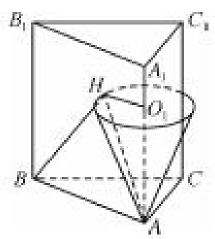


图 2

17. 解：设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d.

选择①：由 a_1,a_3,a_9 成等比数列，得 $a_3^2=a_1a_9$，即 $(a_1+2d)^2=a_1(a_1+8d)$，得 $a_1d=d^2$，

又 $d\neq0$，所以 $a_1=d$，…… 3 分

又 $a_4=16=a_1+3d$，所以 $d=4$，$a_1=4$，…… 5 分

所以 $a_n=4n$，$S_n=\frac{n(4+4n)}{2}=2n(n+1)$，…… 7 分

所以 $S_k<2a_k+20$，即 $2k(k+1)-8k-20<0$，整理得 $k^2-3k-10<0$，即 $-2<k<5$，又 k 为正整数，所以正整数 k 存在，可以取 1,2,3,4. …… 10 分

选择②：由 $\frac{S_n}{a_n}=\frac{n+1}{2}$，取 $n=2$，得 $2S_2=3a_2$，即 $2(a_1+a_2)=3a_2$，所以 $a_2=2a_1$，

又 $a_2=a_1+d$，所以 $a_1=d$，…… 3 分

又 $a_1+3d=16$，所以 $d=4$，$a_1=4$，…… 5 分

所以 $a_n=4n$，$S_n=2n(n+1)$，经验证满足条件②. …… 7 分

所以 $S_k<2a_k+20$，即 $2k(k+1)-8k-20<0$，整理得 $k^2-3k-10<0$，即 $-2<k<5$，又 k 为正整数，所以正整数 k 存在，可以取 1,2,3,4. …… 10 分

选择③：$S_6=6a_1+15d$，$S_4=4a_1+6d$，又 $S_6=2S_4+4$，

所以 $6a_1+15d=2(4a_1+6d)+4$，化简得 $2a_1+4=3d$，…………………………………………………… 3分

又 $a_1+3d=16$，所以 $d=4$，$a_1=4$，…………………………………………………………………………… 5分

所以 $a_n=4n$，$S_n=2n(n+1)$，……………………………………………………………………………………… 7分

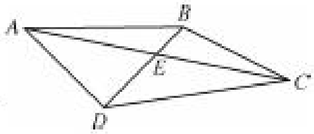
所以 $S_k<2a_k+20$，即 $2k(k+1)-8k-20<0$，整理得 $k^2-3k-10<0$，即 $-2<k<5$，又 k 为正整数，所以正整数 k 存在，可以取 1,2,3,4. ………………………………………………………………………………………… 10分

18. 解：(1)在△ABD 中，由余弦定理，得 $AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cdot\cos\angle ABD$，所以 $18=36+BD^2-2\times6\times BD\times\cos45^\circ$，化简得 $BD^2-6\sqrt{2}BD+18=0$，解得 $BD=3\sqrt{2}$，…………………………………… 2分

所以 $BD=AD=3\sqrt{2}$，$AB=6$，所以 $BD^2+AD^2=AB^2$，则 $\angle ADB=90^\circ$. ……………………………… 3分

又 $DE=2BE$，则 $DE=2\sqrt{2}$，所以 $AE^2=DE^2+AD^2=(2\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2})^2=26$，则 $AE=\sqrt{26}$，

又 $AE=EC$，所以 $AC=2\sqrt{26}$. ……………………………………………………………………………… 6分



(2)由 $\angle ADB=90^\circ$，$AE=\sqrt{26}$，$DE=2\sqrt{2}$，$AD=3\sqrt{2}$，

得 $\sin\angle EAD=\dfrac{DE}{AE}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{26}}$，$\cos\angle EAD=\dfrac{AD}{AE}=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{26}}$. ………………………………… 8分

在△ACD 中，由余弦定理，得 $CD^2=AD^2+AC^2-2AD\cdot AC\cdot\cos\angle EAD=50$，

则 $CD=5\sqrt{2}$. …………………………………………………………………………………………………… 10分

在△ACD 中，由正弦定理，得 $\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}=\dfrac{CD}{\sin\angle EAD}$，

则 $\sin\angle ADC=\dfrac{2\sqrt{26}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{26}}}{5\sqrt{2}}=\dfrac{4}{5}$. ………………………………………………………………… 12分

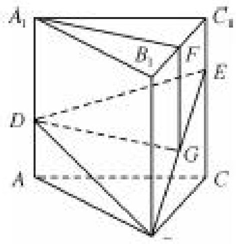
19. 解：(1)由题意知相关系数 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{20}(y_i-\bar{y})^2}}=\dfrac{120}{\sqrt{70\times280}}=\dfrac{120}{140}\approx0.857$，……………………… 2分

因为 y 与 x 的相关系数 r 满足 $|r|\in[0.75,1]$，所以 y 与 x 之间具有较强的线性相关关系. ……………… 4分

(2)$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{120}{70}=\dfrac{12}{7}$，

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=\dfrac{800}{20}-\dfrac{12}{7}\times\dfrac{100}{20}=\dfrac{220}{7}$，所以 $\hat{y}=\dfrac{12}{7}x+\dfrac{220}{7}$. ………………………………………… 9分

(3)由(2)可估计该城镇 2021 年的国民生产总值 $\hat{y}=\dfrac{12}{7}\times5+\dfrac{220}{7}=40$(亿元). ……………………………… 12分



20. (1)证明：取 BE 中点 G，连接 FG，DG，…………………………………………………… 1分

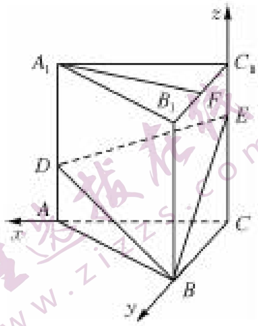
则 $FG\parallel CC_1\parallel AA_1$，且 $FG=\dfrac{C_1E+BB_1}{2}=\dfrac{1+3}{2}=2$，……………………………………… 3分

所以 $FG \mathrel{\underline{\parallel}} A_1D$，所以四边形 A_1DGF 为平行四边形，所以 $A_1F\parallel DG$.

又 $A_1F\not\subset$ 平面 BDE，$DG\subset$ 平面 BDE，

所以 $A_1F\parallel$ 平面 BDE. …………………………………………………………………………………… 5分

(2)解:因为直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中 $AC\perp BC$,所以 CA,CB,CC_1 两两垂直.分别以 $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CC_1}$ 的方向为 x 轴,y 轴,z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系,则 $B(0,2,0)$, $E(0,0,2)$, $D(2,0,1)$, $A(2,0,0)$,得到 $\overrightarrow{BE}=(0,-2,2)$, $\overrightarrow{BD}=(2,-2,1)$, $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$. ………………………………………… 8分



设平面 BDE 法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0$, $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0$,

即 $\begin{cases}-2y+2z=0,\\ 2x-2y+z=0,\end{cases}$

令 $y=1$,得到平面 BDE 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=\left(\frac{1}{2},1,1\right)$. ………………………………………… 10分

设直线 A_1B_1 与平面 BDE 所成的角为 θ,则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{A_1B_1},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{\left|\frac{1}{2}\times(-2)+1\times2+1\times0\right|}{\sqrt{\frac{1}{4}+1+1}\cdot\sqrt{4+4+0}}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$,

所以直线 A_1B_1 与平面 BDE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{6}$. ………………………………………… 12分

21.解:(1)设椭圆 C 的长半轴长为 a,短半轴长为 b,半焦距为 c,

因为 $|EF_1|=\sqrt{[\sqrt{2}-(-\sqrt{2})]^2+1^2}=3$, $|EF_2|=1$,

所以 $|EF_1|+|EF_2|=4=2a$,即 $a=2$. ………………………………………… 2分

又因为 $c=\sqrt{2}$,所以 $b^2=a^2-c^2=2$,又椭圆 C 的焦点在 x 轴上,且中心在坐标原点,

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. ………………………………………… 4分

(2)因为 $\frac{|AM|}{|PQ|}=\frac{1}{2}$,则 $|PQ|=2|AM|$,又因为 M 为 PQ 的中点,所以 $AP\perp AQ$,易知点 $A(2,0)$,设 $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$.

当直线 l 的斜率存在时,设直线 l 的方程为 $y=kx+m$,

由 $\begin{cases}y=kx+m,\\ x^2+2y^2=4,\end{cases}$ 得 $(2k^2+1)x^2+4kmx+(2m^2-4)=0$,

所以 $\Delta=16k^2m^2-4(2k^2+1)(2m^2-4)=8(4k^2-m^2+2)>0$,

由韦达定理可得 $x_1+x_2=\frac{-4km}{2k^2+1}$, $x_1x_2=\frac{2m^2-4}{2k^2+1}$, ………………………………………… 6分

$\overrightarrow{AP}=(x_1-2,kx_1+m)$, $\overrightarrow{AQ}=(x_2-2,kx_2+m)$,

则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=(x_1-2)(x_2-2)+(kx_1+m)(kx_2+m)=(k^2+1)x_1x_2+(km-2)(x_1+x_2)+m^2+4=\frac{2(m^2-2)(k^2+1)-4km(km-2)}{2k^2+1}+m^2+4=0$, ………………………………………… 7分

化简可得 $3m^2+8km+4k^2=0$,即 $(m+2k)(3m+2k)=0$.

若 $m=-2k$,则直线 l 的方程为 $y=k(x-2)$,此时直线 l 过顶点 A,不符合题意;

若 $m=-\frac{2}{3}k$,易知满足 $\Delta=8(4k^2-m^2+2)>0$,此时直线 l 的方程为 $y=k\left(x-\frac{2}{3}\right)$,直线 l 过定点 $\left(\frac{2}{3},0\right)$; ……9分

当直线 l 的斜率不存在时，设直线 l 的方程为 $x=t(t\neq 2)$，则 $P(t,y_1)$、$Q(t,-y_1)$，

所以 $\frac{t^2}{4}+\frac{y_1^2}{2}=1$，则 $y_1^2=2-\frac{t^2}{2}$，$\overrightarrow{AP}=(t-2,y_1)$，$AQ=(t-2,-y_1)$，

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=(t-2)^2-y_1^2=(t-2)^2-2+\frac{1}{2}t^2=\frac{3}{2}t^2-4t+2=0$，

因为 $t\neq 2$，解得 $t=\frac{2}{3}$，直线 l 过点 $\left(\frac{2}{3},0\right)$. ………………………………………… 11 分

综上，直线 l 过定点 $\left(\frac{2}{3},0\right)$. ………………………………………………………… 12 分

22. (1)解：$f(x)=ax+\frac{a+1}{x}-\ln x$，定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=a-\frac{a+1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{ax^2-x-(a+1)}{x^2}=\frac{(x+1)(ax-a-1)}{x^2}$. ……………………………… 2 分

若 $a=0$，$f'(x)=\frac{-(x+1)}{x^2}<0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；…………………… 3 分

若 $a>0$，$f'(x)=\frac{a(x+1)\left(x-1-\frac{1}{a}\right)}{x^2}$，$1+\frac{1}{a}>0$，当 $x\in\left(0,1+\frac{1}{a}\right)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in\left(1+\frac{1}{a},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,1+\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(1+\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增. …………………… 5 分

(2)证明：令 $g(x)=f(x)-(2a+1)=ax+\frac{a+1}{x}-\ln x-2a-1$，则 $g(1)=0$，因为 $a\geq 1$，

由(1)知，$g(x)$ 在 $\left(0,1+\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(1+\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增，

又 $1+\frac{1}{a}>1$，所以 $g\left(1+\frac{1}{a}\right)<0$. ……………………………………………………… 8 分

令 $h(a)=g(2a+2)=2a^2-\frac{1}{2}-\ln(2a+2)$，$a\in[1,+\infty)$，

由 $h'(a)=4a-\frac{2}{2a+2}=\frac{4a^2+4a-1}{a+1}>0$ 恒成立，所以 $h(a)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

又 $e^3>16$，所以 $\frac{e^3}{16}>1$，即 $\frac{e^{\frac{3}{2}}}{4}>1$. 从而 $h(1)=\frac{3}{2}-\ln 4=\ln\frac{e^{\frac{3}{2}}}{4}>0$，所以 $h(a)>h(1)>0$，即 $g(2a+2)>0$. …… 10 分

因为 $2a+2>2$，$1+\frac{1}{a}<2$，所以 $2a+2>1+\frac{1}{a}$，

所以存在唯一 $x_1\in\left(1+\frac{1}{a},2a+2\right)$，使得 $g(x_1)=0$，所以 $g(x)<0$ 的解集为 $(1,x_1)$，

即 $f(x)<2a+1$ 的解集为 $(1,x_1)$，又 $(1,x_1)$ 的区间长度为 $x_1-1<(2a+2)-1=2a+1$，

原命题得证. ……………………………………………………………………………………

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。