2024届高三开学摸底联考 全国卷

文 科 数 学 试 题

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为120分钟，满分150分

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{x|x>2\}$，则 $A\cap B=$

A.$\{1\}$　　B.$\{3,4\}$　　C.$\{2,3,4\}$　　D.$\{1,2,3,4\}$

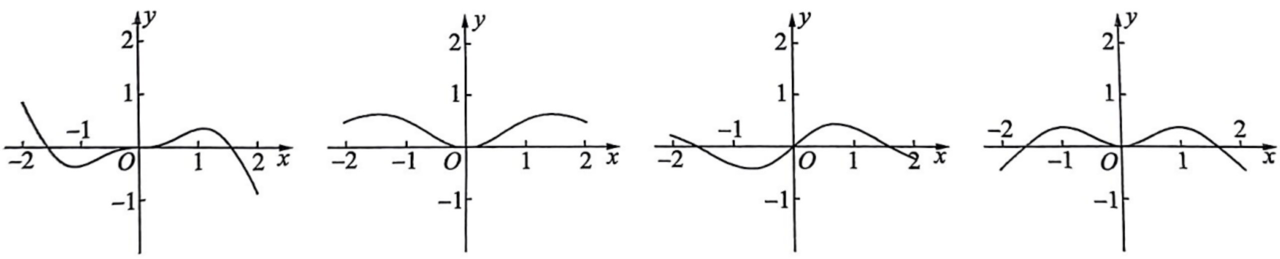
2.已知复数 $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$（i是虚数单位），则复数 $\bar{z}$ 对应的点位于

A.第一象限　　B.第二象限　　C.第三象限　　D.第四象限

3.已知 $\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha=\frac{8}{5}$，则 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=$

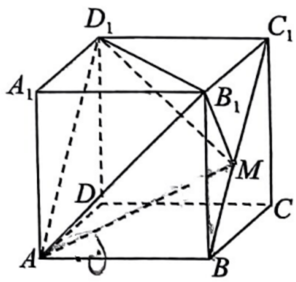
A.$\frac{3}{5}$　　B.$\frac{4}{5}$　　C.$-\frac{3}{5}$　　D.$-\frac{4}{5}$

4.函数 $f(x)=\frac{2x\sin x}{e^x+e^{-x}}$（e为自然对数的底数）在 $[-2,2]$ 的大致图象是



A　　B　　C　　D

5.如图，在棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M 在对角线 BC_1 上移动，异面直线 AM 与 DC 所成角为 θ，则 $\sin\theta$ 的最大值为



A.$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　B.$\frac{\sqrt{3}}{3}$

C.$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D.$\frac{2}{3}$

6.已知椭圆 $\frac{x^2}{10-t}+\frac{y^2}{t-4}=1$ 的焦点在 y 轴上，若焦距为4，则该椭圆的离心率为

A.$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B.$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　C.$\frac{1}{2}$　　D.$\frac{\sqrt{3}}{3}$

7.在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$，$D$在边$BC$上，$\angle DAC=\frac{\pi}{6}$，$AB=AC=2\sqrt{3}$，则$AD=$

A.$\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　B.1　　C.2　　D.$\sqrt{3}$

8.已知函数$f(x)=x$，$g(x)=\ln x$，若直线$x=t$与$f(x)$和$g(x)$的图象分别交于点M,N，则$|MN|$的最小值为

A.1　　B.$\frac{1}{2}+\ln 2$　　C.$2-\ln 2$　　D.$e-1$

9."三分损益法"是古代中国发明的制定音律时所用的生律法.例如：假设能发出第一个基准音的乐器的长度为36，那么能发出第二个基准音的乐器的长度为$36\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=24$，能发出第三个基准音的乐器的长度为$24\times\left(1+\frac{1}{3}\right)=32$，……，也就是依次先减少三分之一，后增加三分之一，以此类推.现有一兴趣小组采用此规律构造了一个共12项的数列$\{a_n\}$用来研究数据的变化，已知$a_8=192$，则$a_5=$

A.324　　B.297　　C.256　　D.168

10.已知实数m,n满足$0<m<\frac{1}{2}$，$1<n<2$，则下列关系中正确的是

A.$mn^2>1$　　B.$\sin m>\sin\frac{1}{n}$　　C.$m^n<n^m$　　D.$\log_m n<\log_n m$

11.已知函数$f(x)=\begin{cases}x^3-3x,x<0,\\2^x-2,x\geqslant 0,\end{cases}$若关于$x$的方程$f^2(x)-(a+2)f(x)+2a=0$有5个不同的实根，则实数$a$的取值范围为

A.$(-1,0)$　　B.$(-1,2)$　　C.$(0,1)$　　D.$(0,2)$

12.已知在三棱锥$P-ABC$中，$PA+BC=4$，$AB\perp AC$，$PA\perp$平面ABC，则三棱锥$P-ABC$的外接球表面积的最小值为

A.π　　B.4π　　C.8π　　D.12π

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13.已知t为实数，$\boldsymbol{a}=(2,t)$，$\boldsymbol{b}=(3,0)$，则向量$\boldsymbol{a}$在向量$\boldsymbol{b}$方向上的投影为________.

14.若实数x,y满足不等式组$\begin{cases}x-y-4\leqslant 0,\\x-3y\geqslant 0,\\y\geqslant 0,\end{cases}$则$z=(x-5)^2+y^2$的最小值为________.

15.已知双曲线E的一个焦点为F，点F到双曲线E的一条渐近线$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$的距离为1，则双曲线E的标准方程是________.

16.已知函数$f(x)=x^3+3x^2+x+1$，设数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=-2n+9$，则$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_9)=$________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：60 分.

17.(12 分)某高校 A 课程的教师为了解本学期选修该课程的学生的情况，随机调查了 200 名选该课程的学生的一些情况，具体数据如下表：

	本专业	非本专业	合计
女生	70		80
男生		40	
合计			

(1)根据已知条件完成上面的 2×2 列联表，并判断是否有 99.9%的把握认为选修 A 课程的是否为本专业学生与学生性别有关；

(2)从样本中为"非本专业"的学生中，先按性别比例用分层抽样的方法抽出 5 人，再从这 5 人中随机抽取 3 人，求 3 人都是男生的概率.

参考公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

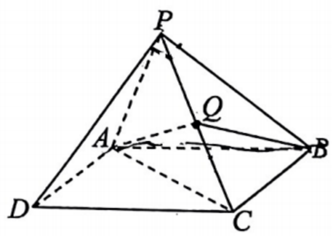
参考数据：

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

18.(12 分)如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面四边形 $ABCD$ 为矩形，平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，$PA\perp PB$，$AB=\sqrt{5}$，$PB=BC=2$，点 Q 为 PC 的中点.

(1)求证：平面 $ABQ\perp$ 平面 PAC；

(2)求三棱锥 $P-QBD$ 的体积.



19.(12 分)已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=0$，且有 $\dfrac{a_{n+1}+2}{2}=a_n+n$.

(1)证明：数列 $\{a_n+2n\}$ 是等比数列；

(2)求数列 $\left\{\dfrac{n}{a_n+2n}\right\}$ 的前 n 项和 S_n.

20.(12 分)已知点 F 为抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$的焦点,点 $P(1,2)$,$Q(0,1)$,且$|PF|=|QF|$.

(1)求抛物线 C 的标准方程;

(2)若正方形 $ABCD$ 的顶点 A、B 在直线 $l:x-y+2=0$ 上,顶点 C、D 在抛物线 C 上,求$|FC|+|FD|$.

21.(12 分)已知函数 $f(x)=\ln x-x+(x-2)e^x-m$,$m\in\mathbf{Z}$.

(1)当 $m=1$ 时,求曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程;

(2)若关于 x 的不等式 $f(x)<0$ 在$(0,1]$上恒成立,求 m 的最小值.

(二)选考题:共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22.[选修 4—4:坐标系与参数方程](10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中,射线 l 的方程为 $y=\sqrt{3}x(x\geqslant 0)$,曲线 C 的方程为 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$.以坐标原点为极点,x 轴正半轴为极轴建立极坐标系.

(1)求射线 l 和曲线 C 的极坐标方程;

(2)若射线 l 与曲线 C 交于点 P,将射线 OP 绕极点按逆时针方向旋转$\frac{\pi}{3}$交 C 于点 Q,求$\triangle POQ$ 的面积.

23.[选修 4—5:不等式选讲](10 分)

设函数 $f(x)=|2x-2|+|2x+a|$.

(1)当 $a=4$ 时,求不等式 $f(x)\geqslant 26$ 的解集;

(2)若 $a>0$,$b>0$,$f(x)$的最小值为 m,且 $m+b=6$,求证:$\frac{1}{a+4}+\frac{1}{4b}\geqslant\frac{9}{32}$.