学校________ 班级________ 姓名________ 准考证号________ 考场号________ 座位号________

密 封 线 内 不 要 答 题

2022～2023学年高三第六次联考试卷

2

数　学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\left\{x\left|\frac{2x-3}{x+1}\leqslant 0\right.\right\}$，$B=\{x|y=\ln(1-x)\}$，则 $A\cap B=$

A. $(-1,1)$　　B. $[-1,1)$

C. $(-\infty,-1]$　　D. $(-\infty,-1)$

2. 设复数 $z=\frac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$，则 $|z+2\bar{z}|=$

A. $\frac{\sqrt{82}}{2}$　　B. $\frac{41}{2}$　　C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{9}{2}$

3. 设随机变量 ξ 服从正态分布 $N(6,\sigma^2)$，若 $P(\xi<3a-3)=P(\xi>-a+1)$，则 a 的值为

A. 9　　B. 7　　C. 5　　D. 4

4. 已知某样本的容量为50，平均数为36，方差为48，现发现在收集这些数据时，其中的两个数据记录有误，一个错将24记录为34，另一个错将48记录为38．在对错误的数据进行更正后，重新求得样本的平均数为 $\bar{x}$，方差为 s^2，则

A. $\bar{x}=36,s^2<48$　　B. $\bar{x}=36,s^2>48$

C. $\bar{x}>36,s^2<48$　　D. $\bar{x}<36,s^2>48$

5. 已知 $\left(x+\frac{a}{x^3}\right)\left(2x-\frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中各项系数的和为4，则该展开式中的常数项为

A. 200　　B. 280　　C. -200　　D. -280

6. 在△ABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若 $\sqrt{3}\sin B+2\cos^2\frac{B}{2}=3$，$\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{\sin A\sin B}{6\sin C}$，则△ABC的外接圆的面积为

A. 12π　　B. 16π　　C. 24π　　D. 64π

7. 已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为F，过点P(5，0)的直线l交C于A，B两点，O为坐标原点，记△ABO与△AFO的面积分别为 S_1 和 S_2，则 S_1+3S_2 的最小值为

A. $8\sqrt{2}$　　B. $20\sqrt{2}$　　C. $24\sqrt{2}$　　D. $32\sqrt{2}$

8. 设 $a=\sin\frac{1}{5}, b=\frac{1}{5}\cos\frac{1}{5}, c=\ln\frac{11}{9}$，则

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$　　C. $b>c>a$　　D. $c>a>b$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知 m,n 是两条不同的直线，α,β 是两个不同的平面，则下列说法错误的是

A. 若 $m\perp\alpha,\alpha\perp\beta$，则 $m/\!/\beta$

B. 若 $m/\!/\alpha,\alpha/\!/\beta$，则 $m/\!/\beta$

C. 若 $m\subset\alpha,n\subset\alpha,m/\!/\beta,n/\!/\beta$，则 $\alpha/\!/\beta$

D. 若 $m\perp\alpha,m\perp\beta,n\perp\alpha$，则 $n\perp\beta$

10. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\sin\omega x,\cos\omega x)$，$\boldsymbol{b}=\left(1-\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{2}\right),1+\cos\omega x\right)(\omega>0)$，函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-1$，则

A. 若 $f(x)$ 的最小正周期为 π，则 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{5\pi}{8},0\right)$ 对称

B. 若 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称，则 ω 可能为 $\frac{5}{4}$

C. 若 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{2\pi}{5},\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增，则 ω 的取值范围是 $\left(0,\frac{3}{2}\right]$

D. 若 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后得到一个偶函数的图象，则 ω 的最小值为 5

11. 阿波罗尼斯是古希腊著名数学家，与欧几里得、阿基米德被称为亚历山大时期数学三巨匠，阿波罗尼斯发现：平面内到两个定点 A,B 的距离之比为定值 $\lambda(\lambda>0$，且 $\lambda\neq1)$ 的点的轨迹是圆，此圆被称为"阿波罗尼斯圆"．在平面直角坐标系 xOy 中，$A(-2,0)$，$B(4,0)$，点 P 满足 $\left|\frac{PA}{PB}\right|=\frac{1}{2}$．设点 P 的轨迹为曲线 C，则下列说法正确的是

A. C 的方程为 $(x+4)^2+y^2=16$

B. 当 A,B,P 三点不共线时，则 $\angle APO=\angle BPO$

C. 在 C 上存在点 M，使得 $|MO|=2|MA|$

D. 若 $D(2,2)$，则 $|PB|+2|PD|$ 的最小值为 $4\sqrt{5}$

12. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，若 $f(x)-4x^2$ 是奇函数，$f(x)+x$ 是偶函数，函数 $g(x)=\begin{cases}f(x),x\in[0,1),\\2g(x-1),x\in[1,+\infty),\end{cases}$ 则

A. 当 $x\in[1,2)$ 时，$g(x)=8x^2-18x+8$

B. 当 $x\in[2,3)$ 时，$g(x)=16x^2-68x+72$

C. $\dfrac{g\left(\frac{2k+1}{2}\right)}{g\left(\frac{2k-1}{2}\right)}=4(k\in\mathbf{N}^*)$

D. $\sum\limits_{k=1}^{n}g\left(\frac{2k-1}{2}\right)=\frac{2^n-1}{2}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若 e_1,e_2 是夹角为 60° 的两个单位向量，则 $\boldsymbol{a}=\frac{1}{3}e_1+\frac{2}{3}e_2$ 与 $\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}e_1-\frac{3}{4}e_2$ 的夹角大小为________．

14. 若 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $f(x+1)$ 是偶函数，当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时，$f(x)=\log_3(x+1)$，则 $f\left(\frac{163}{2}\right)=$________．

15. 在正三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB=4$，D 是 PC 的中点，且 $AD\perp PB$，则该三棱锥内切球的表面积为________.

16. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，点 P 是 C 上异于左、右顶点的一点，$\triangle PF_1F_2$ 外接圆的圆心为 M，O 为坐标原点，则 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PO}$ 的最小值为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=4$，且 $\frac{a_n}{S_n}=\frac{n+1}{2n}(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)若 $b_n=\frac{2^n}{(n+3)a_n}$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，求证：$T_n<\frac{5}{12}$.

18.（本小题满分 12 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且满足 $\frac{2\cos C}{a}=\frac{2}{b}+\frac{\sin C}{b\sin A}$.

(1)求角 B 的大小；

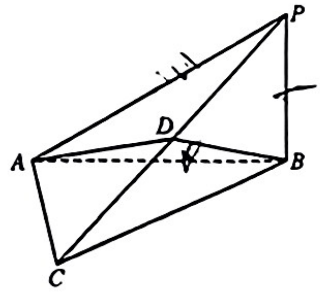
(2)若 $b=8$，D 为边 AC 的中点，且 $BD=\frac{8}{3}$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

19.（本小题满分 12 分）

在三棱锥 $P-ABC$ 中，平面 $PAB\perp$ 平面 ABC，$PA=2\sqrt{2}$，$PB=\sqrt{2}$，$AB=\sqrt{6}$，$AC\perp PC$，D 是棱 PC 的中点.

(1)求证：$BC\perp AC$；

(2)若 $AC=\sqrt{3}$，求直线 BC 与平面 ADB 所成角的正弦值.



20.(本小题满分 12 分)

2022 年卡塔尔世界杯是第二十二届世界杯足球赛，是历史上首次在卡塔尔和中东国家境内举行、也是继 2002 年韩日世界杯之后时隔二十年第二次在亚洲举行的世界杯足球赛，除此之外，卡塔尔世界杯还是首次在北半球冬季举行、第二次世界大战后首次由从未进过世界杯的国家举办的世界杯足球赛.小胡、小陈两位同学参加学校组织的世界杯知识答题拿积分比赛游戏，规则如下：小胡同学先答 2 道题，至少答对一道题后，小陈同学才有机会答题，同样也是两次答题机会，每答对一道题获得 5 积分，答错不得分.小胡同学每道题答对的概率均为$\frac{3}{4}$，小陈同学每道题答对的概率均为$\frac{2}{3}$，每道题是否答对互不影响.

(1)求小陈同学有机会答题的概率；

(2)记 X 为小胡和小陈同学一共拿到的积分，求 X 的分布列和数学期望.

21.(本小题满分 12 分)

已知双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左顶点为 A，其离心率为$\frac{\sqrt{5}}{2}$，且 A 到 E 的一条渐近线的距离为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(1)求 E 的方程；

(2)过 $P(4,0)$的直线 l 与 E 的右支交于 B,C 两点，直线 AB,AC 与 y 轴分别交于 M,N 两点，记直线 PM,PN 的斜率分别为 k_1,k_2，试判断 k_1k_2 是否为定值？若是，求出该定值；若不是，请说明理由.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=e^{x+a}-\ln(x+1)-a(a\in\mathbf{R})$.

(1)若 $a=0$，讨论 $f(x)$的单调性；

(2)求证：$f(x)$有唯一极值点 x_0，且 $f(x)\geqslant 1$.

密封线内不要答题