

秘密★启用前

2023 年第一次高考考前适应性训练试卷

数学试题参考答案和评分参考

评分说明：

1. 本解答只给出了一种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则。
2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。更多试题与答案，关注微信公众号：三晋高中指南
3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。
4. 只给整数分数。选择题和填空题不给中间分。

一. 选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	D	B	B	A	C	D	A

二. 选择题：

题号	9	10	11	12
答案	AB	AC	ABD	BCD

三. 填空题：

$$13. -\frac{16}{25} \quad 14. 180 \quad 15. \left[\frac{\ln 3}{2} + 3, +\infty \right) \quad 16. \frac{3\sqrt{3}}{16}$$

三. 解答题：

17. (1) 解：因为 $a_{n+1} = a_n^3$ ， $a_1 = 10 > 0$ ，

所以 $\lg a_{n+1} = \lg a_n^3$, 即 $\lg a_{n+1} = 3 \lg a_n$,1 分

即 $b_{n+1} = 3b_n$2 分

又 $b_1 = 1$,3 分

所以 $\{b_n\}$ 是首项为 1, 公比为 3 的等比数列,4 分

所以 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 3^{n-1}$5 分

(2) 证明: 因为 $c_n = \log_3 b_1 + \log_3 b_2 + \log_3 b_3 + \cdots + \log_3 b_n + \log_3 b_{n+1}$,

所以 $c_n = 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$,6 分

所以 $\frac{1}{c_n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$,7 分

因此 $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \cdots + \frac{1}{c_n} = 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$,
.....8 分

有 $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \cdots + \frac{1}{c_n} = 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < 2$,9 分

所以 $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \cdots + \frac{1}{c_n} < 2$10 分

18. (1) 证明: 由 $a \cos B = b(1 + \cos A)$ 及正弦定理得:

$\sin A \cos B = \sin B(1 + \cos A)$,1 分

整理得 $\sin(A - B) = \sin B$,2 分

因为 $A, B \in (0, \pi)$,

所以 $A - B \in (-\pi, \pi)$,3 分

所以 $A - B = B$ 或 $(A - B) + B = \pi$,4 分

所以 $A = 2B$ 或 $A = \pi$ (舍),5 分

所以 $A = 2B$6 分

(2) 由 $a \cos B = b(1 + \cos A)$ 及余弦定理得:

$$\frac{a(a^2 + c^2 - b^2)}{2ac} = b \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right), \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

整理得 $a^2 - b^2 = bc$,9 分

又有 $c = 2b$, $a = \sqrt{3}$, 更多试题与答案, 关注微信公众号: 三晋高中指南
可解得 $b = 1$, $c = 2$,10 分

则 $a^2 + b^2 = c^2$, 三角形 ABC 是直角三角形,11 分

所以三角形 ABC 的面积为 $\frac{1}{2}ab = \frac{\sqrt{3}}{2}$12 分

19. 解: (1) 由题意知, 每组中各个坑是否发芽相互独立, 每个坑不发芽的概率为 $(1 - p)^2$,1 分

设每组不发芽的坑数为 X , 则 $X \sim B(3, (1 - p)^2)$,2 分

所以每组没有发芽的坑数的平均数为 $3 \times (1-p)^2 = \frac{3}{4}$,

解得 $p = \frac{1}{2}$, 4 分

所以每个种子的发芽率为 $\frac{1}{2}$ 6 分

(2) 由 (1) 知每个坑不发芽的概率为 $\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, 7 分

设 ξ 为补种种子的个数, 则 $\xi \sim B(3, \frac{1}{4})$, 8 分

所以 $E(\xi) = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, 10 分

$E(Y) = E(\xi) + 6 = \frac{27}{4}$ 12 分

20. (1) 证明: 过 C 作 $CE \parallel BA$, 且 $CE = BA$, 连接 AE , DE , 取 EC 的中点 O , 连接 DO , BO , AO . 则 $\angle ECD$ 为 $\overline{BA}$ 与 $\overline{CD}$ 的夹角, 即 $\angle ECD = 60^\circ$ 1 分

设 $BC = 1$, 则 $AB = CD = \sqrt{2}$,

因为 $EC = DC = \sqrt{2}$, 所以 $\triangle DEC$ 为等边三角形,

则 $DO \perp CE$, $DO = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 2 分

因为 $AB \perp BC$, 所以平行四边形 $ABCE$ 为矩形, 所以

$BO = \sqrt{OC^2 + BC^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 所以 $DO^2 + BO^2 = BD^2$, 即 $DO \perp BO$.

.....3 分

因为 $CE \cap BO = O$, $CE, BO \subset$ 平面 $ABCE$,

所以 $DO \perp$ 平面 $ABCE$4 分

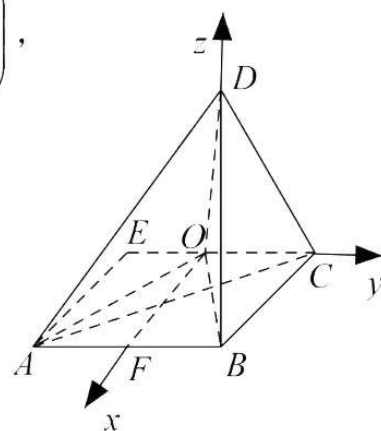
取 AB 的中点 F , 连接 OF , 分别以 OF, OC, OD 为 x, y, z 轴建

立空间直角坐标系 $O-xyz$.

$$\text{则 } A\left(1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), B\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), C\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right),$$

$$D(0, 0, \frac{\sqrt{6}}{2}), \text{ 所以 } \overrightarrow{AC} = (-1, \sqrt{2}, 0),$$

$$\overrightarrow{BD} = \left(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right), \text{5 分}$$



$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (-1) \times (-1) + \sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 0 = 0, \text{ 所以 } AC \perp BD. \text{6 分}$$

$$(2) \overrightarrow{AB} = (0, \sqrt{2}, 0), \overrightarrow{BC} = (-1, 0, 0), \overrightarrow{BD} = \left(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right). \text{7 分}$$

设平面 ABD 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{BD} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} \sqrt{2}y = 0, \\ -x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{6}}{2}z = 0, \end{cases} \text{ 可取 } \vec{m} = (\sqrt{6}, 0, 2). \text{9 分}$$

设平面 BCD 的法向量为 $\vec{n} = (a, b, c)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{BC} = 0, \\ \vec{m} \cdot \vec{BD} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} a = 0, \\ -a - \frac{\sqrt{2}}{2}b + \frac{\sqrt{6}}{2}c = 0, \end{cases} \text{可取} \vec{n} = (0, \sqrt{3}, 1). \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{所以} |\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{2}{\sqrt{6+4} \cdot \sqrt{3+1}} = \frac{\sqrt{10}}{10}, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{所以平面 } ABD \text{ 与平面 } BCD \text{ 夹角的余弦值为 } \frac{\sqrt{10}}{10}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$21 \text{ 解: (1) 选①, 由题意} \begin{cases} 4a + 4b = 36, \\ 2b = a + c, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a = 5, \\ b = 4, \\ c = 3. \end{cases} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } C \text{ 的标椎方程为 } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{选②, 由题意} \begin{cases} 4a + 4b = 36, \\ c^2 = (a+1) \times \frac{3}{8}b, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a = 5, \\ b = 4, \\ c = 3. \end{cases} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } C \text{ 的标椎方程为 } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) ①当直线 PQ 的斜率不存在时, l_{PQ} 的方程为 $x = -3$, 不妨设 P 在 x

轴上方, 则 $P\left(-3, \frac{16}{5}\right), Q\left(-3, -\frac{16}{5}\right),$

l_{AP} 的方程为 $y = -\frac{2}{5}(x-5)$, 令 $x = -\frac{25}{3}$, 得 $y = \frac{16}{3}$,

所以 $M\left(-\frac{25}{3}, \frac{16}{3}\right)$, 同理 $N\left(-\frac{25}{3}, -\frac{16}{3}\right)$,

所以以 MN 为直径的圆的标准方程为 $\left(x + \frac{25}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{256}{9}$5 分

②当直线 PQ 的斜率存在时, 设 l_{PQ} 的方程为 $y = k(x+3)$, $P(x_1, y_1)$,

$Q(x_2, y_2)$. 更多试题与答案, 关注微信公众号: 三晋高中指南

$$\text{联立} \begin{cases} y = k(x+3), \\ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1, \end{cases} \text{得 } (25k^2 + 16)x^2 + 150k^2x + 225k^2 - 400 = 0,$$

由韦达定理得 $x_1 + x_2 = \frac{-150k^2}{25k^2 + 16}$, $x_1x_2 = \frac{225k^2 - 400}{25k^2 + 16}$7 分

因为 $k_{AP} = \frac{y_1}{x_1 - 5}$, 所以 l_{AP} 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1 - 5}(x - 5)$,

令 $x = -\frac{25}{3}$, 得 $y = \frac{-40y_1}{3(x_1 - 5)}$, 即 M 的坐标为 $\left(-\frac{25}{3}, \frac{-40y_1}{3(x_1 - 5)}\right)$,

同理 N 的坐标为 $\left(-\frac{25}{3}, \frac{-40y_2}{3(x_2 - 5)}\right)$,

所以以 MN 为直径的圆的标准方程为

$$\left(x + \frac{25}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{40y_1}{3(x_1 - 5)}\right)\left(y + \frac{40y_2}{3(x_2 - 5)}\right) = 0. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\left(y + \frac{40y_1}{3(x_1 - 5)}\right)\left(y + \frac{40y_2}{3(x_2 - 5)}\right)$$

$$= y^2 + \frac{40}{3}\left(\frac{y_1}{x_1 - 5} + \frac{y_2}{x_2 - 5}\right)y + \frac{1600}{9} \cdot \frac{y_1}{x_1 - 5} \cdot \frac{y_2}{x_2 - 5},$$

$$\frac{y_1}{x_1 - 5} \cdot \frac{y_2}{x_2 - 5} = \frac{k(x_1 + 3)k(x_2 + 3)}{(x_1 - 5)(x_2 - 5)} = \frac{k^2(x_1x_2 + 3(x_1 + x_2) + 9)}{x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 25},$$

将韦达定理代入并整理得 $\frac{k^2(x_1x_2 + 3(x_1 + x_2) + 9)}{x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 25} = \frac{-256}{1600}, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

令 $y = 0$, 则 $\left(x + \frac{25}{3}\right)^2 = \frac{256}{9}$, 解得 $x = -3$ 或 $x = -\frac{41}{3}$.

当斜率不存在时, 令 $y = 0$, 则 $\left(x + \frac{25}{3}\right)^2 = \frac{256}{9}$, 解得 $x = -3$ 或 $x = -\frac{41}{3}$.

由①②知, 以 MN 为直径的圆过 $(-3, 0)$ 和 $\left(-\frac{41}{3}, 0\right)$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

22. 解: (1) 函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x) = e^x - 2ax + 2a$, $f''(x) = e^x - 2a$,

当 $a \leq 0$ 时, $f''(x) > 0$, 所以 $f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增: $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

当 $a > 0$ 时, 由 $f''(x) > 0$ 知 $x > \ln 2a$, 所以 $f'(x)$ 在 $(-\infty, \ln 2a)$ 上单调

递减，在 $(\ln 2a, +\infty)$ 上单调递增.4 分

(2) 因为对 $\forall x \in \mathbf{R}$, $(x-2) \cdot f(x) \geq 0$ 恒成立,

所以当 $x \geq 2$ 时, $f(x) \geq 0$; 当 $x \leq 2$ 时, $f(x) \leq 0$, 则 $f(2)=0$,

所以 $b = -e^2$6 分

所以 $f(x) = e^x - ax^2 + 2ax - e^2$ 且连续不断.

$f'(x) = e^x - 2ax + 2a$, $f''(x) = e^x - 2a$,7 分

情形一: 当 $x \geq 2$ 时, 更多试题与答案, 关注微信公众号: 三晋高中指南

当 $a \leq \frac{e^2}{2}$ 时, $f''(x) \geq 0$, $f'(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增,

$f'(2) = e^2 - 2a \geq 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x) \geq f(2) = 0$, 满足题意.8 分

当 $a > \frac{e^2}{2}$ 时, 由 (1) 知 $f'(x)$ 在 $(2, \ln 2a)$ 上单调递减, 所以

$f'(x) < f'(2) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(2, \ln 2a)$ 上单调递减,

所以 $f(x) < f(2) = 0$, 不符合题意.9 分

情形二: 当 $x \leq 2$ 时,

当 $a < 0$ 时, 由 $f\left(\frac{e^2}{2a}\right) = e^{\frac{e^2}{2a}} - \frac{e^4}{4a} > 0$, 知 $f(x) \leq 0$ 不恒成立;10 分

当 $a = 0$ 时, $f(x) = e^x - e^2$, 易知 $(x-2) \cdot f(x) \geq 0$ 恒成立.

当 $0 < a \leq \frac{e^2}{2}$ 时,

由 (1) 知 $f'(x)$ 的最小值 $f'(\ln 2a) = 2a(2 - \ln 2a) \geq 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 2]$ 单调递增, 而 $f(2) = 0$, 所以 $f(x) \leq f(2) = 0$ 成立.11 分

综上可得 a 的取值范围为 $\left[0, \frac{e^2}{2}\right]$12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线