

2023 届高三年级 5 月份大联考 数学试题

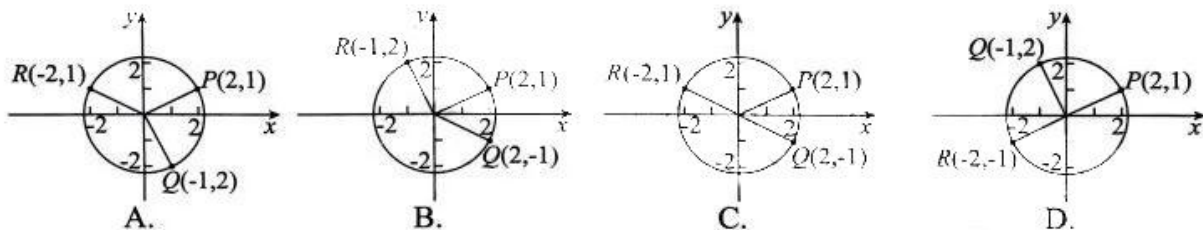
本试卷共 8 页, 22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

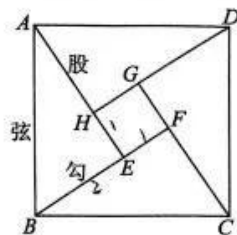
1. 答题前, 先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上, 并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答: 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答: 用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后, 请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、单选题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 $A = \{x | \ln |x-3| = 0\}$, $B = \{x | (x+2)(x-3) < 0\}$, 则 $A \cap B =$
 A. $\{0, 4\}$ B. $\{2\}$ C. $\{2, 4\}$ D. $\{0, 2, 4\}$
2. 已知复数 $z = 2 - i$, 若 z, \bar{z}, iz 在复平面上对应的点分别为 P, Q, R , 其中 O 为坐标原点, 则下列图形正确的是



3. 我国东汉末期数学家赵爽在为《周髀算经》作注时, 利用赵爽弦图(如图), 给出了勾股定理最早的证明, 这个证明可谓别具匠心, 极富创新意识。赵爽用几何图形的截、割、拼、补来证明代数式之间的恒等关系, 既具严密性, 又具直观性, 为中国古代以形证数、形数统一、代数和几何紧密结合、互不可分的独特风格树立了一个典范。赵爽弦图是由四个全等的直角三角形拼成的内、外都是正方形的美丽图案。若 $BF = 3EF = 3$, 则 $(\vec{AE} + \vec{EF} - \vec{CF}) \cdot \vec{BC} =$



- A. 2
 - B. 9
 - C. 13
 - D. 18
4. 函数 $f(x) = \frac{2 - \cos x + \sin x}{2 + \cos x}$ 可以表示为一个偶函数 $g(x)$ 和奇函数 $h(x)$ 的和, 则 $g(x)$ 的值域是
 A. $[\frac{1}{3}, 3]$ B. $[\frac{1}{2}, 2]$ C. $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ D. $[-3, 3]$

5. “ $x > y$ ”是“ $x - y > \cos x - \cos y$ ”的

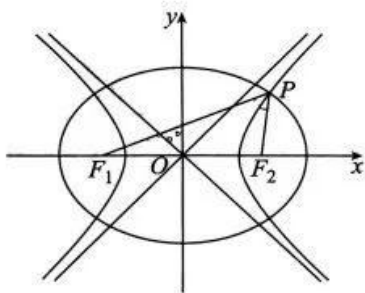
- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分又不必要条件

6. $(x+1)^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中含 x^3 项的系数为

- A. 20 B. -20 C. 30 D. -30

7. 如图, 焦点均为 F_1, F_2 的椭圆 C_1 和双曲线 C_2 的离心率分别为 e_1, e_2 , 点 P 为 C_1 与 C_2 的一个公共点, 且 $\angle F_1 P F_2 = \frac{\pi}{3}$, 则 $\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2}$ 的最大值为 来源: 高三答案公众号

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
B. $\sqrt{3}$
C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
D. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$



8. 若 $a = \sin \frac{1}{\pi}, b = \sqrt{\pi} - 1, c = \frac{2\pi - 1}{2\pi^2}$, 则

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $b > c > a$ D. $c > b > a$

二、多选题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

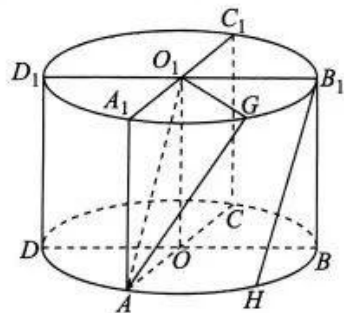
9. 若数列 $\{a_n\}$ 为单调递增数列, 且数据 $a_1, a_2, \dots, a_{2023}$ 的均值为 m , 则

- A. 数据 $a_1, a_2, \dots, a_{2024}$ 的中位数为 $\frac{a_{1012} + a_{1013}}{2}$
B. 数据 $a_1 + 2, a_2 + 2, a_3 + 2, \dots, a_{2023} + 2$ 的均值为 m
C. $a_{1011} < m < a_{1012}$
D. 若数据 $a_1, a_2, \dots, a_{2023}$ 的标准差为 s , 则数据 $2a_1 + 1, 2a_2 + 1, 2a_3 + 1, \dots, 2a_{2023} + 1$ 的标准差为 $2s$

10. 电子通讯和互联网中, 信号的传输、处理和傅里叶变换有关. 傅里叶变换能将满足一定条件的某个函数表示成三角函数(正弦和或余弦函数)的线性组合. 例如函数 $f(x) = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots + \frac{\sin 13x}{13}$ 的图象就可以近似地模拟某种信号的波形, 则

- A. $f(x)$ 为周期函数, 且最小正周期为 π B. $f(x)$ 为奇函数
C. $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称 D. $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的最大值为 7

11. 如图所示,为了制作一个圆柱形灯笼,先要制作 2 个全等的矩形骨架 $AA_1C_1C-BB_1D_1D$,平面 $AA_1C_1C \perp$ 平面 BB_1D_1D ,线段 AC, BD 是圆柱下底面圆 O 的直径,线段 A_1C_1, B_1D_1 是上底面圆 O_1 的直径, $OA = AA_1 = 2$,点 G 是圆弧 A_1B_1 (劣弧)的中点, H 是圆弧 AB (劣弧)上的动点,则



- A. 存在点 H ,使得 $B_1H \parallel O_1A$
 B. 存在点 H ,使得 $B_1H \perp O_1G$
 C. 存在点 H ,使得 $B_1H \parallel$ 平面 O_1AG
 D. 存在点 H ,使得 B_1H 与 O_1O 所成的角为 60°
12. O 是坐标原点,平面内任意两点 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 规定:

$d_1(M, N) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ 为 M, N 的欧几里得距离,

$d_2(M, N) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ 为 M, N 的曼哈顿距离,

$d_3(M, N) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$ 为 M, N 的切比雪夫距离,

$d_4(M, N) = (\sqrt{|x_1 - x_2|} + \sqrt{|y_1 - y_2|})^2$ 为 M, N 的闵可夫斯基距离.

设 $P(x, y)$ 上任意一点,则

- A. $d_1(O, M) + d_1(O, N) \geq d_1(M, N)$
 B. $d_2(O, M) + d_2(O, N) \geq d_2(M, N)$
 C. 若 $d_3(O, P) = 1$,则点 P 的轨迹为以 O 为中心,坐标轴为对角线,且边长为 2 的正方形
 D. 若 $d_4(O, P) = 1$,则点 P 的轨迹为以 O 为圆心,半径为 1 的圆

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

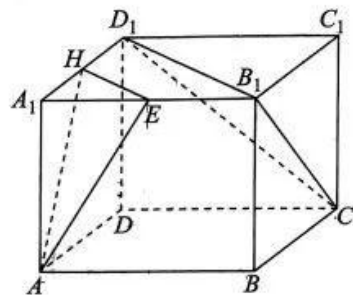
13. 已知 $\frac{2}{\cos 2\theta} + \tan 2\theta = 2, \theta \neq k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 则 $\tan 2\theta =$ _____
14. 已知正三棱柱有内切球,且内切球的表面积为 4π ,则该正三棱柱外接球的体积为 _____.
15. 已知 O 为坐标原点, $F_1(-1, 0), F_2(1, 0), Q(0, 3)$, 向量 $m = (1, -2)$, 动点 P 满足 $\vec{PQ} \parallel m$, 写出一个 a , 使得有且只有一个点 P 同时满足 $||PF_1| - |PF_2|| = 2a$ ($0 < a < 1$), 则 $a =$ _____.
16. 袋中装有 5 枚形状、大小完全相同的圆形卡片,其中 3 枚正品,正面印“乾”字,反面印“坤”字,2 枚次品,正、反两面都印“乾”字,若从袋中任取一枚,将它投掷 3 次,
- ① 3 次都出现“乾”字的概率是 _____;
- ② 已知 3 次都出现“乾”字,则这枚卡片是正品的概率是 _____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=2$ ， E, H 分别是棱 A_1B_1, A_1D_1 的中点， $AE \perp CD_1$ 。

- (1) 求正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积；
- (2) 求平面 AEH 与平面 CB_1D_1 所成锐二面角的余弦值。



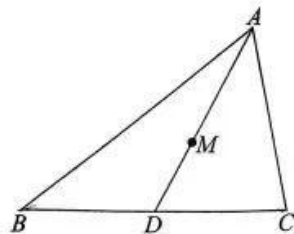
18. (本小题满分 12 分)

锐角 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ， $a \sin B + \frac{\sqrt{3}}{3} b \cos(B+C) = \frac{\sqrt{3}}{3} b$ 。

- (1) 求 A ；
- (2) 如图， $a=3$ ， AM 的延长线交 BC 于点 D ，_____，求 $\triangle ABC$ 的面积。
请在下列两个条件中选择一个作为已知条件补充在横线上，并解决问题。

① M 是 $\triangle ABC$ 的外心，且 $MD = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ；② M 是 $\triangle ABC$ 的内心，且 $AD = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 。

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答记分。



19. (本小题满分 12 分)

机器人一般是指自动控制机器(Robot)的俗称,自动控制机器包括一切模拟人类行为或思想与模拟其他生物的机械,用以取代或协助人类工作. 机器人一般由执行机构、驱动装置、检测装置、控制系统和复杂机械等组成. 某大学机器人研究小组研发了 A 型、B 型两款火场救人的机器人,为检验其效能做下列试验:

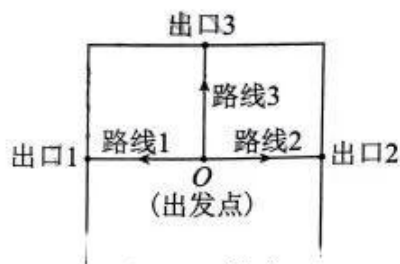
如图,一正方形复杂房间有三个同样形状、大小的出口 1、2、3,其中只有一个是打开的,另外两个是关闭的,房间的中心 O 为机器人的出发点, A 型、B 型两个机器人分别从出发点出发沿路线 1、2、3 任选一条寻找打开的出口,找到后沿打开的出口离开房间,如果找到的出口是关闭的,则按原路线返回到出发点,继续重新寻找.

A 型机器人是没有记忆的,它在出发点选择各个出口是等可能的,

B 型机器人是有记忆的,它在出发点选择各个出口的尝试不多于一次,且每次选哪个出口是等可能的.

以 X 表示 A 型机器人为了离开房间尝试的次数,以 Y 表示 B 型机器人为了离开房间尝试的次数.

- (1) 试求离散型随机变量 Y 的分布列和期望;
- (2) 求 $X < Y$ 的概率.



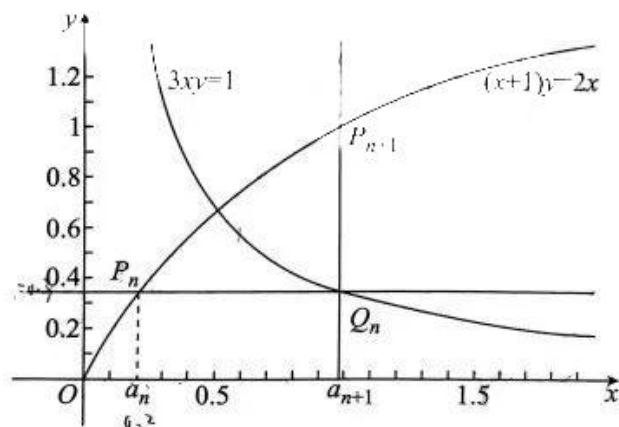
20. (本小题满分 12 分)

如图, 已知曲线 $\Gamma_1: (x+1)y=2x(x>0)$ 及曲线 $\Gamma_2: 3xy=1(x>0)$, 从 Γ_1 上的点 $P_n(a_n, b_n) (n \in \mathbf{N}^*)$ 作与 y 轴垂直的直线, 交曲线 Γ_2 于点 Q_n , 再过点 Q_n 作与 x 轴垂直的直线, 交曲线 Γ_1 于点 P_{n+1} , 点 P_n 的横坐标构成数列 $\{a_n\} (0 < a_1 < \frac{1}{2})$.

(1) 试求 a_{n+1} 与 a_n 之间的关系;

(2) 若 $a_1 = \frac{1}{3}$, 证明: $\left\{ \frac{a_n - \frac{1}{2}}{a_n + \frac{1}{3}} \right\}$ 是等比数列, 并写出 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 在(2)的条件下, 若 $\lambda \geq a_n$ 恒成立, 求实数 λ 的取值范围.

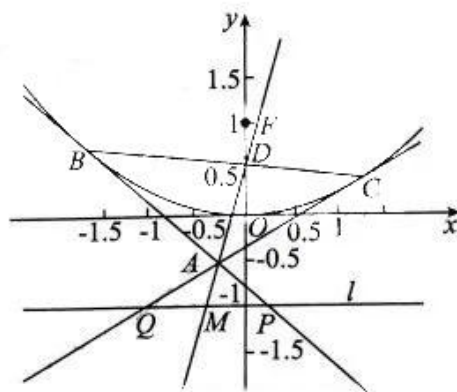


21. (本小题满分 12 分)

已知点 $(4, 2)$ 在抛物线 $\Gamma: x^2 = 2py$ 上.

(1) 求 Γ 的准线 l 的方程;

(2) 如图, 点 A 是位于 x 轴下方的动点, 过点 A 作抛物线 Γ 的两条切线, 切点分别为 B, C , 直线 BC 与 y 轴的交点为 D , 直线 AB, AC, AD 分别与准线 l 相交于点 P, Q, M , 求证: $|MP| = |MQ|$.



22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1 - a \ln x}{x}$ ($a \geq 0$) 的极大值为 1.

(1) 求 a 的值;

(2) 设 $g(x) = x^2 [1 - f(x)] + x - 1$, 若 $m > 0, n > 0$ 且 $m \neq n$ 时, $g(m) + g(n) < 0$, 证明: $mn < 1$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 (网址: www.zizzs.com) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

自主选拔在线
zizzsw

自主选拔在线
微信号：zizzsw

自主选拔在线
微信号：zizzsw

自主选拔在线
微信号：zizzsw

自主选拔在线
微信号：zizzsw