

2017 年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. $\frac{3+i}{1+i} = (\quad)$

- A. $1+2i$ B. $1-2i$ C. $2+i$ D. $2-i$

2. 设集合 $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{x | x^2 - 4x + m = 0\}$. 若 $A \cap B = \{1\}$; 则 $B = (\quad)$

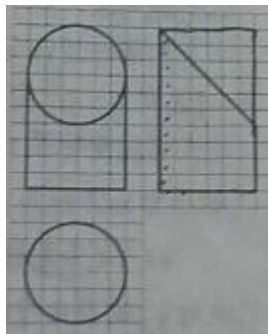
- A. $\{1, -3\}$ B. $\{1, 0\}$ C. $\{1, 3\}$ D. $\{1, 5\}$

3. 我国古代数学名著《算法统宗》中有如下问题：“远望巍巍塔七层，红光点点倍加增，共灯三百八十一，请问尖头几盏灯？”意思是：一座 7 层塔共挂了 381 盏灯，且相邻两层中的下一层灯数是上一层灯数的 2 倍，则塔的顶层共有灯 $(\quad)$

- A. 1 盏 B. 3 盏 C. 5 盏 D. 9 盏

4. 如图，网格纸上小正方形的边长为 1，学科网粗实线画出的是某几何体的三视图，该几何体由一平面将一圆柱截去一部分所得，则该几何体的体积为 $(\quad)$

- A. 90π B. 63π C. 42π D. 36π



5. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x+3y-3 \leq 0 \\ 2x-3y+3 \geq 0 \\ y+3 \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = 2x+y$ 的最小值是 $(\quad)$

- A. -15 B. -9 C. 1 D. 9

6. 安排 3 名志愿者完成 4 项工作，每人至少完成 1 项，每份工作由 1 人完成，则不同的安排方式共有 $(\quad)$

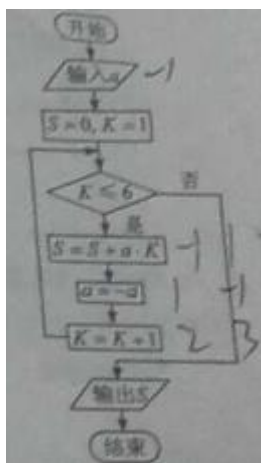
- A. 12 种 B. 18 种 C. 24 种 D. 36 种

7. 甲、乙、丙、丁四位同学一起去问老师询问成语竞赛的成绩。老师说：你们四人中有 2 位优秀，2 位良好，我现在给甲看乙、丙的成绩，给乙看丙的成绩，给丁看甲的成绩。看后甲对大家说：我还是不知道我的成绩。根据以上信息，则 $(\quad)$

- A. 乙可以知道四人的成绩 B. 丁可以知道四人的成绩
C. 乙、丁可以知道对方的成绩 D. 乙、丁可以知道自己的成绩

8. 执行右面的程序框图，如果输入的 $a = -1$ ，则输出的 $S = (\quad)$

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5



9. 若双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线被圆 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 所截得的弦长为 2, 则 C 的离心率为 ()

- A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

10. 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ABC = 120^\circ$, $AB = 2$, $BC = CC_1 = 1$, 则异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

11. 若 $x = -2$ 是函数 $f(x) = (x^2 + ax - 1)e^{x-1}$ 的极值点, 则 $f(x)$ 的极小值为 ()

- A. -1 B. $-2e^{-3}$ C. $5e^{-3}$ D. 1

12. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, P 为平面 ABC 内一点, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ 的最小值是 ()

- A. -2 B. $-\frac{3}{2}$ C. $-\frac{4}{3}$ D. -1

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 一批产品的二等品率为 0.02, 从这批产品中每次随机取一件, 有放回地抽取 100 次, X 表示抽到的二等品件数, 则 $DX =$ _____.

14. 函数 $f(x) = \sin^2 x + \sqrt{3} \cos x - \frac{3}{4}$ ($x \in [0, \frac{\pi}{2}]$) 的最大值是_____.

15. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_3 = 3$, $S_4 = 10$, 则 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{S_k} =$ _____.

16. 已知 F 是抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点, M 是 C 上一点, EM 的延长线交 y 轴于点 N . 若 M 为 FN 的中点, 则 $|FN| =$ _____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、解答过程或演算步骤。第 17~21 题为必做题, 每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答。

(一) 必考题: 共 60 分。

17. (12 分)

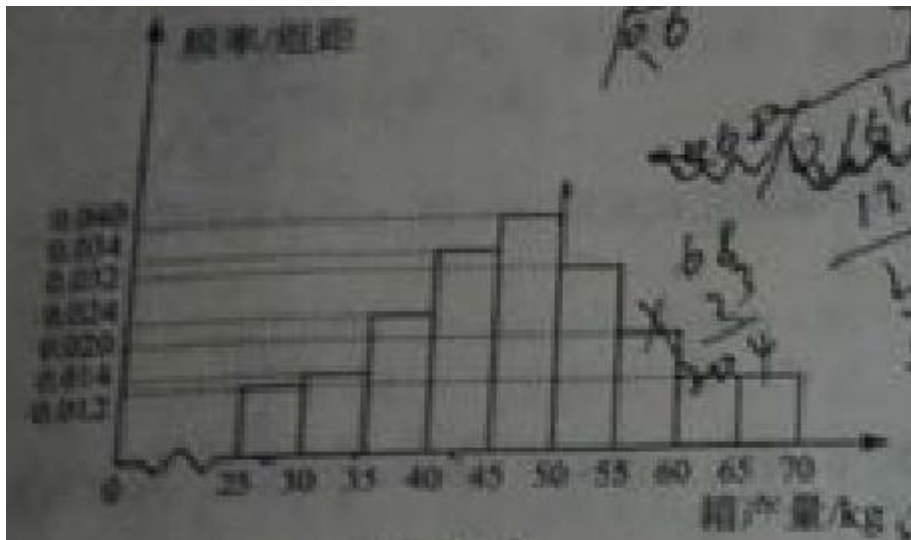
$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sin(A+C) = 8\sin^2 \frac{B}{2}$.

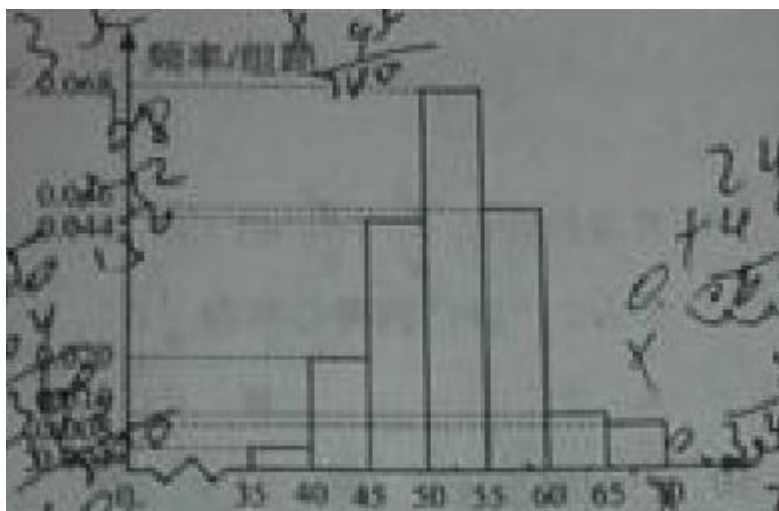
(1) 求 $\cos B$

(2) 若 $a+c=6$, $\triangle ABC$ 面积为 2, 求 b .

18. (12 分)

淡水养殖场进行某水产品的新、旧网箱养殖方法的产量对比, 收获时各随机抽取 100 个网箱, 测量各箱水产品的产量 (单位: kg) 某频率直方图如下:





- (1) 设两种养殖方法的箱产量相互独立, 记 A 表示事件: 旧养殖法的箱产量低于 50kg, 新养殖法的箱产量不低于 50kg, 估计 A 的概率;
- (2) 填写下面列联表, 并根据列联表判断是否有 99% 的把握认为箱产量与养殖方法有关:

	箱产量 < 50 kg	箱产量 ≥ 50 kg
旧养殖法		
新养殖法		

- (3) 根据箱产量的频率分布直方图, 求新养殖法箱产量的中位数的估计值 (精确到 0.01)

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

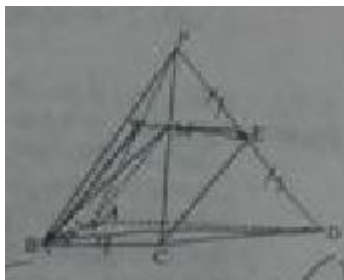
19. (12 分)

如图, 四棱锥 P-ABCD 中, 侧面 PAD 为等比三角形且垂直于底面三角形 BCD,

$AB = BC = \frac{1}{2}AD$, $\angle BAD = \angle ABC = 90^\circ$, E 是 PD 的中点

- (1) 证明: 直线 CE // 平面 PAB

- (2) 点 M 在棱 PC 上, 且直线 BM 与底面 ABCD 所成锐角为 45° , 求二面角 M-AB-D 的余弦值



20. (12分)

设 O 为坐标原点，动点 M 在椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 上，过 M 做 x 轴的垂线，垂足为 N ，点 P 满

足 $\overrightarrow{NP} = \sqrt{2}\overrightarrow{NM}$.

(1) 求点 P 的轨迹方程；

(2) 设点 Q 在直线 $x=-3$ 上，且 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 1$. 证明：过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F .

21. (12分)

已知函数 $f(x) = ax^3 - ax - x \ln x$, 且 $f(x) \geq 0$.

(1) 求 a ;

(2) 证明: $f(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0 , 且 $e^{-2} < f(x_0) < 2^{-3}$.

(二) 选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，按所做的第一题计分。

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10分)

在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点， x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho \cos \theta = 4$.

(1) M 为曲线 C_1 上的动点，点 P 在线段 OM 上，且满足 $OM \cdot OP = 16$, 求点 P 的轨迹 C_2 的直角坐标方程；

(2) 设点 A 的极坐标为 $(2, \frac{\pi}{3})$, 点 B 在曲线 C_2 上，求 ΔOAB 面积的最大值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10分)

已知 $a > 0, b > 0, a^2 + b^2 = 2$, 证明:

(1) $(a+b)(a^3 + b^3) \geq 4$;

(2) $a+b \leq 2$.

