郴州市2023年上学期期末教学质量监测试卷

高二数学参考答案和评分细则

(命题人:安仁一中　康永艳　桂阳三中　陈旭　郴州三中　李兰兵

审题人:郴州二中　李云汤　郴州市十五中　黄文华　市教科院　汪昌华)

一、单项选择题(本大题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1-5　BACDB　　　　6-8　CAD

二、多选题(共4个小题,每小题5分,共20分.每小题至少两个正确选项,漏选得2分,错选不得分)

9. BC　　10. BC　　11. ABD　　12. BCD

三、填空题(本题共4小题,每小题5分,共20分)

13. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　14. $\frac{15}{4}$　　15. $4\sqrt{7}$　　16. $(e+1,+\infty)$

四、解答题(本大题共6小题,共70分.解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤)

17. (Ⅰ) $\begin{cases}\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}\\ \sqrt{3}\sin B\sin C=\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A\end{cases}\Rightarrow\sqrt{3}\,bc=b^2+c^2-a^2.$ …………………… (2分)

$\Rightarrow\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{\sqrt{3}\,bc}{2bc}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$ …………………… (4分)

$\because A\in(0,\pi)$, $\therefore A=\dfrac{\pi}{6}.$ …………………… (5分)

(Ⅱ)由$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$, $A=\dfrac{\pi}{6}$, $a=2b$,得 $\sin B=\dfrac{1}{4}.$ …………………… (6分)

$\because a=2b$, $\therefore A>B$,即角B一定是锐角. …………………… (7分)

$\therefore\cos B=\sqrt{1-\sin^2B}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$,又 $\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$ …………………… (8分)

所以 $\cos C=-\cos(A+B)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1-3\sqrt{5}}{8}.$ …………………… (10分)

18. (Ⅰ)当 $n=1$ 时，$S_1=a_1=2a_1+2-5$，解得 $a_1=3$， ………………………………………… (1 分)

当 $n\geq 2$ 时，$S_{n-1}=2a_{n-1}+2(n-1)-5$.

可得 $S_n-S_{n-1}=2a_n+2n-5-[2a_{n-1}+2(n-1)-5]$，整理得 $a_n=2a_{n-1}-2$， ………………… (3 分)

从而 $a_n-2=2(a_{n-1}-2)(n\geq 2)$，

又 $a_1-2=1$，所以数列$\{a_n-2\}$是首项为 1，公比为 2 的等比数列. ………………… (4 分)

所以 $a_n-2=(a_1-2)\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$，故 $a_n=2^{n-1}+2$，

综上，数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2^{n-1}+2$. ……………………………………………… (6 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)得 $a_{n+1}-2=2^n$，所以 $b_n=\log_2(a_{n+1}-2)=n$，又 $c_n=2^{n-1}$，

$\therefore b_nc_n=n\cdot 2^{n-1}$， ……………………………………………………………… (7 分)

$\therefore T_n=b_1c_1+b_2c_2+\cdots+b_nc_n$

$=1\times 2^0+2\times 2^1+3\times 2^2+\cdots+n\times 2^{n-1}$

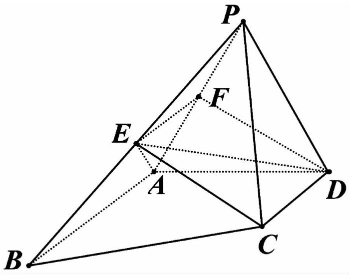
$\therefore 2T_n=1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+n\times 2^n$， ……………………………………… (9 分)

两式相减得

$-T_n=1+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}-n\times 2^n=\dfrac{1-2^n}{1-2}-n\times 2^n=(1-n)\times 2^n-1$

$\therefore T_n=(n-1)\times 2^n+1$. ……………………………………………………………… (12 分)

19. (Ⅰ)取 AP 中点 F，连接 EF，DF.



$\because E$ 为 PB 中点，$\therefore EF \underline{\underline{/\!/}} \dfrac{1}{2}AB$，又 $CD \underline{\underline{/\!/}} \dfrac{1}{2}AB$，

$\therefore CD \underline{\underline{/\!/}} EF$，$\therefore CDFE$ 为平行四边形， …… (3 分)

$\therefore DF/\!/CE$. 又$\triangle PAD$ 为正三角形，

$\therefore PA\perp DF$，从而 $PA\perp CE$， ……………… (4 分)

又 $PA\perp CD$，$CD\cap CE=C$，$\therefore PA\perp$ 平面 CDE，又 $PA\subset$平面 PAB，

$\therefore$ 平面 $PAB\perp$平面 CDE. ……………………………………………………… (6 分)

(Ⅱ)$AB/\!/CD$，$PA\perp CD\Rightarrow PA\perp AB$，又 $AB\perp AD$，$PA\cap AD=A$，$\therefore AB\perp$平面 PAD.

$\therefore CD\perp$平面 PAD. $\therefore V_{P-ACD}=V_{C-ADP}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ADP}\cdot CD=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times AD^2\times 2=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore AD=2$.

以 A 为原点，如图建立空间直角坐标系. 则 $B(4,0,0)$，$P(0,1,\sqrt{3})$，$D(0,2,0)$，$E(2,\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，

$\therefore \overrightarrow{AE}=(2,\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{ED}=(-2,\dfrac{3}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{BD}=(-4,2,0)$ ……………… (8 分)

设 $\overrightarrow{n}=(x,y,z)$ 为平面 ADE 的法向量，$\overrightarrow{m}=(a,b,c)$ 为平面 DEB 的法向量

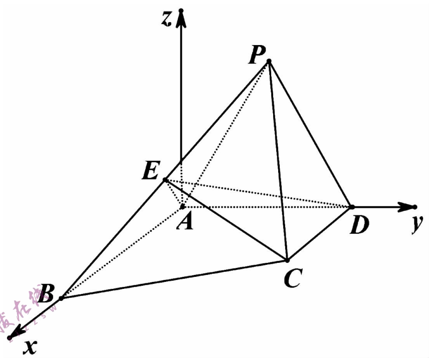
则 $\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AE}=2x+\dfrac{1}{2}y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z=0\\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{ED}=-2x+\dfrac{3}{2}y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}z=0\end{cases}$，$\begin{cases}\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{BD}=-4a+2b=0\\ \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{ED}=-2a+\dfrac{3}{2}b-\dfrac{\sqrt{3}}{2}c=0\end{cases}$

令 $z=-4$，得 $\overrightarrow{n}=(\sqrt{3},0,-4)$，令 $a=1$，

得 $\overrightarrow{m}=(1,2,\dfrac{2\sqrt{3}}{3})$ ……………………… (10 分)

$\therefore\left|\cos<\overrightarrow{m},\overrightarrow{n}>\right|=\dfrac{|\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{m}||\overrightarrow{n}|}=\dfrac{5}{19}$， … (11 分)

即面 ADE 与面 DEB 的夹角的余弦值为 $\dfrac{5}{19}$. (12 分)



20. 设事件 B=“任取一个羽毛球是合格品”，事件 A_1=“产品取自第一批”，事件 A_2=“产品取自第二批”，则 $\Omega=A_1\cup A_2$ 且 A_1,A_2 互斥. ……………………………………………… (1 分)

(Ⅰ)由全概率公式可知 $P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)$，

$P(B)=0.6\times(1-0.05)+0.4\times(1-0.04)=0.954$. ……………………………… (3 分)

由贝叶斯公式可知 $P(A_1\mid B)=\dfrac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{P(B)}=\dfrac{0.6\times(1-0.05)}{0.954}=\dfrac{285}{477}$. ……… (6 分)

(Ⅱ)由条件可知 X 的可取值为 0，1，2，3. ……………………………………… (7 分)

$P(X=0)=0.6\times0.6\times0.6=0.216$， ……………………………………………… (8 分)

$P(X=1)=C_3^1\times0.6^2\times0.4=0.432$，$P(X=2)=C_3^2\times0.6\times0.4^2=0.288$， ………………… (9 分)

$P(X=3)=0.4^3=0.064$. ……………………………………………………… (10 分)

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	0.216	0.432	0.288	0.064

$\therefore E(X)=0\times0.216+1\times0.432+2\times0.288+3\times0.064=1.2$. ……………………… (12 分)

21. 解析：(Ⅰ)依题意，$B(-1,0)$，圆 B 的半径为 4. ………………………………… (1 分)

于是 $|EA|+|EB|=4$，且 $|AB|=2<4$，故点 E 的轨迹为椭圆. ………………………… (3 分)

$\because 2a=4, 2c=2$，$\therefore b^2=a^2-c^2=3$. ……………………………………………… (4 分)

所以点 E 的轨迹方程为：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ……………………………………… (5 分)

(Ⅱ)依题意直线 CD 的斜率不为 0，设直线 CD 的方程为：$x=my+1$，$C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$

……………………………………………………………………………………………… (6 分)

代入椭圆方程 $3x^2+4y^2=12$ 得：$(4+3m^2)y^2+6my-9=0$.

所以 $y_1+y_2=-\dfrac{6m}{4+3m^2}$ ……①，$y_1y_2=\dfrac{-9}{4+3m^2}$……② ……………………… (7 分)

又直线 MC 的方程为：$y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，直线 ND 的方程为：$y=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2)$ … (8 分)

联立上述两直线方程得：$\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2)=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2)$， ………………………… (9 分)

即 $\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{y_2(x_1+2)}{y_1(x_2-2)}=\dfrac{y_2(my_1+3)}{y_1(my_2-1)}=\dfrac{my_1y_2+3y_2}{my_1y_2+y_1}$， ……………………… (10 分)

将①②代入上式得：$\dfrac{x+2}{x-2}=3$，解得 $x=4$. ………………………………… (11 分)

所以直线 MC 与 ND 的交点的横坐标是定值 4. ……………………………… (12 分)

22. (Ⅰ)解：$f'(x)=\dfrac{2}{x}+ax-(a+2)=\dfrac{(ax-2)(x-1)}{x}(x>0)$. …………………………… (1 分)

因为 $a<0$，$x>0$，所以 $ax-2<0$. 于是

$0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(0,1)$上单调递增； ……………………………… (3 分)

$x>1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减. ……………………………… (5 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)知：

函数 $f(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减.

若函数 $f(x)$有两个不同的零点 x_1,x_2，

则 $f(x)_{\max}=f(1)=-2-\dfrac{a}{2}>0$，故 $a<-4$.

又 $x\to0$ 时，$f(x)\to-\infty$，且 $f(e^2)=4-2e^2+(\dfrac{e^4}{2}-e^2)a<0$.

于是函数 $f(x)$ 有两个不同的零点，且两零点分别位于区间 $(0,1),(1,+\infty)$. …… 6 分

不妨令 $0<x_1<1<x_2$.

$F(x)=f(x)-f(2-x)=2\ln x+\dfrac{a}{2}x^2-(a+2)x-2\ln(2-x)-\dfrac{a}{2}(2-x)^2+(a+2)(2-x)$

$=2\ln x-2\ln(2-x)-4x+4$（其中 $0<x<1$）. ……………………………………（8 分）

因为 $F'(x)=\dfrac{4}{x(2-x)}-4=\dfrac{4(x-1)^2}{x(2-x)}>0$， ……………………………………（9 分）

所以函数 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，所以 $F(x)<F(1)=0$，即 $f(x)<f(2-x)$.

又因为 $x_1\in(0,1)$，所以 $f(x_1)<f(2-x_1)$， ……………………………………（10 分）

而 $f(x_2)=f(x_1)$，所以 $f(x_2)<f(2-x_1)$， ……………………………………（11 分）

因为 $0<x_1<1$，$2-x_1>1$，函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $x_2>2-x_1$，即 $x_1+x_2>2$. ……………………………………（12 分）