2023 届高三重点热点诊断测试

数学

本试卷共 6 页，22 小题，满分 150 分.考试时间 120 分钟.

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上.将条形码横贴在答题卡“条形码粘贴处”.

2．作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案.答案不能答在试卷上.

3．非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液.不按以上要求作答无效.

4．考生必须保持答题卡的整洁.考试结束后，将试卷和答题卡一并交回.

一、选择题.本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．设集合 $A=\{x\mid\log_3 x<1,x\in\mathbf{Z}\}$，则满足 $A\cup B=\{1,2,3,4\}$ 的集合 B 的个数为

A．2　　B．3　　C．4　　D．8

【答案】C

【解析】$A=\{1,2\}$，$A\cup B=\{1,2,3,4\}$，B 可取 $\{3,4\},\{2,3,4\},\{1,3,4\},\{1,2,3,4\}$，4 个，选 C.

2．在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_8=6$，$a_{11}=0$，则 $a_2=$

A．16　　B．18　　C．20　　D．22

【答案】B

【解析】$\begin{cases}a_1+7d=6\\a_1+10d=0\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}a_1=20\\d=-2\end{cases}$，$a_2=20-2=18$，选 B.

$\therefore a_n+1=2(a_{n-1}+1)(n\geq 2)$,

$\because a_1=2a_1\Rightarrow a_1=0$ ，而 $a_1+1=1\neq 0$ ，

$\therefore\{a_n+1\}$ 成首项为 1 公比为 2 的等比数列.

（2）由（1）知 $a_n+1=2^{n-1}$ ，$a_n=2^{n-1}-1$ ，

$\therefore b_{n+1}=\begin{cases}2^{n-1}-1,n为奇数,\\2^{n-1}-1-b_n,n为偶数\end{cases}$ ，$b_1=1$ ，

$\therefore n$ 为偶数时，$b_n+b_{n+1}=2^{n-1}-1$ ，

$\therefore b_1+b_2+\cdots+b_{14}=b_1+(b_2+b_3)+(b_4+b_5)+\cdots+(b_{12}+b_{13})+b_{14}$

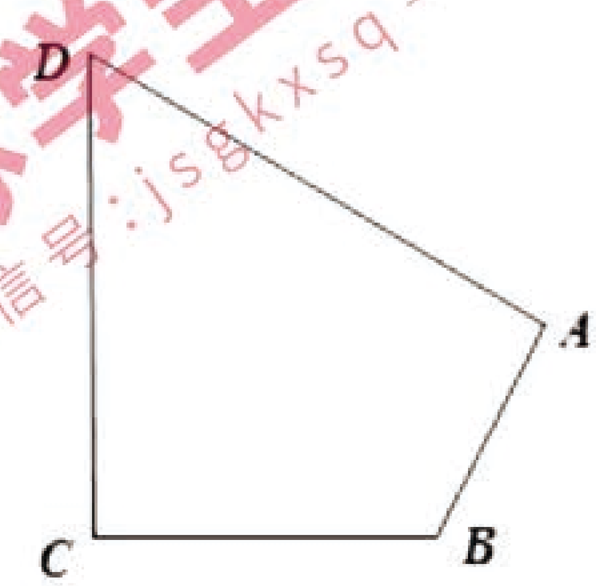
$=1+2^1-1+2^3-1+\cdots+2^{11}-1+2^{12}-1$

$=1+\dfrac{2(1-4^6)}{1-4}-6+2^{12}-1=\dfrac{5\cdot 2^{12}-20}{3}$.

18.（12 分）如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB=1$ ，$AD=\sqrt{3}$ ，$CD=2$ ，$BC=\sqrt{2}$.

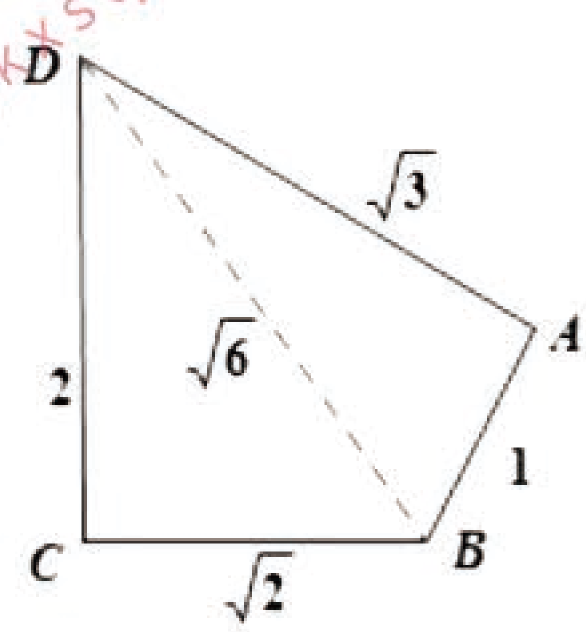
（1）若 $BC\perp CD$ ，求 $\sin\angle ADC$ ；

（2）记 $\triangle ABD$ 与 $\triangle BCD$ 的面积分别记为 S_1 和 S_2 ，求 $S_1^2+S_2^2$ 的最大值.



【解析】

（1）$\because BC\perp CD$ ，$\therefore BD=\sqrt{4+2}=\sqrt{6}$ ，



$\cos\angle ADB=\dfrac{6+3-1}{2\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{8}{6\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ ，$\sin\angle ADB=\dfrac{1}{3}$ ，

$$\begin{cases}\dfrac{3}{2}\pi\le\dfrac{\pi}{2}\omega+\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{5}{2}\pi\\ \dfrac{3}{2}\pi\le\omega\pi+\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{5}{2}\pi\end{cases}$$，无解，则$0<\omega\le\dfrac{1}{4}$.

16.在平面直角坐标系xOy中，已知圆$C_1:(x-1)^2+y^2=2$，圆$C_2:(x-a)^2+(y-\sqrt{2})^2=12$.若圆$C_1$上存在两点$A,B$，且圆$C_2$上恰好存在一点$P$，使得四边形$OAPB$为矩形，则实数$a$的取值集合是__________.

【答案】$\{-6,0,2,4\}$

【解析】设$P(x_0,y_0)$，OP中点$D\left(\dfrac{x_0}{2},\dfrac{y_0}{2}\right)$，$D$也是$AB$中点，$AB=OP=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$，

$C_1D=\sqrt{2-\left(\dfrac{1}{2}AB\right)^2}=\sqrt{2-\dfrac{x_0^2+y_0^2}{4}}$，$C_1D\in[0,\sqrt{2})$，$\therefore 0\le x_0^2+y_0^2\le 8$，

$C_1D=\sqrt{\left(\dfrac{x_0}{2}-1\right)^2+\dfrac{y_0^2}{4}}=\sqrt{2-\dfrac{x_0^2+y_0^2}{4}}$，$\therefore (x_0-1)^2+y_0^2=3$，

$\therefore P$在$(x-1)^2+y^2=3$上，P又在圆C_2上，满足条件的P恰好有一个点，$\therefore$两圆有且仅有一个公共点，$\therefore\sqrt{(1-a)^2+2}=\sqrt{3}+2\sqrt{3}$或$\sqrt{(1-a)^2+2}=2\sqrt{3}-\sqrt{3}$，

$a=-6$或4或0或2，a的取值集合$\{-6,0,2,4\}$.

四、解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10分）设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$S_n=2a_n-n+1$.

（1）证明：数列$\{a_n+1\}$是等比数列；

（2）若数列$\{b_n\}$满足$b_1=a_2$，$b_{n+1}=\begin{cases}a_n, & n\text{为奇数},\\ a_n-b_n, & n\text{为偶数},\end{cases}$求数列$\{b_n\}$的前14项的和.

【解析】

（1）$S_n=2a_n-n+1$，①

$n\ge 2$时，$S_{n-1}=2a_{n-1}-(n-1)+1$，②

①−②$\Rightarrow a_n=2a_n-2a_{n-1}-1$，$a_n=2a_{n-1}+1$，

$\sin\angle BDC=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\cos\angle BDC=\dfrac{2}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

$\therefore\sin\angle ADC=\sin(\angle BDC+\angle ADB)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}+\dfrac{\sqrt{6}}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{3\sqrt{6}}{9}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

（2）设$\angle BAD=\alpha,\angle BCD=\beta$，$\therefore BD^2=3+1-2\sqrt{3}\cos\alpha=4+2-4\sqrt{2}\cos\beta$，

$\therefore 4\sqrt{2}\cos\beta-2\sqrt{3}\cos\alpha=2$，$\therefore 2\sqrt{2}\cos\beta-\sqrt{3}\cos\alpha=1$，①

$$S_1^2+S_2^2=\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\alpha\right)^2+\left(\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot\sin\beta\right)^2=\frac{3}{4}\sin^2\alpha+2\sin^2\beta$$

$$=\frac{3}{4}\sin^2\alpha+2(1-\cos^2\beta)=\frac{3}{4}\sin^2\alpha+2\left[1-\left(\frac{1+\sqrt{3}\cos\alpha}{2\sqrt{2}}\right)^2\right]$$

$$=-\frac{3}{2}\cos^2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{5}{2}\le\frac{-\frac{63}{4}}{-6}=\frac{21}{8}，$$

当且仅当$\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{6},\cos\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$时取“=”.

19.（12分）2022年10月1日，女篮世界杯落幕，时隔28年，中国队再次获得亚军，追平历史最佳成绩.统计数据显示，中国队主力队员A能够胜任小前锋（SF）、大前锋（PF）和得分后卫（SG）三个位置，且出任三个位置的概率分别为$\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}$，同时，当队员$A$出任这三个位置时，球队赢球的概率分别为$\dfrac{4}{9},\dfrac{8}{9},\dfrac{2}{3}$.（队员$A$参加所有比赛均分出胜负）

（1）当队员A参加比赛时，求该球队某场比赛获胜的概率；

（2）在赛前的友谊赛中，第一轮积分规则为：胜一场积3分，负一场积-1分.本轮比赛球队一共进行5场比赛，且至少获胜3场才可晋级第二轮.已知队员A每场比赛均上场且球队顺利晋级第二轮，记球队第一轮比赛最终积分为X，求X的数学期望

【解析】

（1）比赛获胜的概率$P=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{4}{9}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{8}{9}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$.

（2）A赢3场，负两场积分7；A赢4场负一场积分10；A赢5场，积分15分.

$\therefore X$ 的所有可能取值为7,11,15.

记C_i表示第一轮比赛最终积分为$C_i(i=7,11,15)$，D表示“A所在的球队顺利晋级第二轮”

$$P(C_7D)=\mathrm{C}_5^3\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{40}{3^5},$$

$$P(C_{11}D)=\mathrm{C}_5^4\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot\frac{1}{3}=\frac{80}{3^5},$$

$$P(C_{15}D)=\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{3^5},$$

$$P(D)=\frac{152}{3^5},\ \therefore P(X=7)=P(C_7\mid D)=\frac{P(C_7D)}{P(D)}=\frac{5}{19}.$$

$$P(X=11)=P(C_{11}\mid D)=\frac{P(C_{11}D)}{P(D)}=\frac{10}{19},$$

$$P(X=15)=P(C_{15}\mid D)=\frac{P(C_{15}D)}{P(D)}=\frac{4}{19}.$$

$\therefore X$ 的分布列如下：

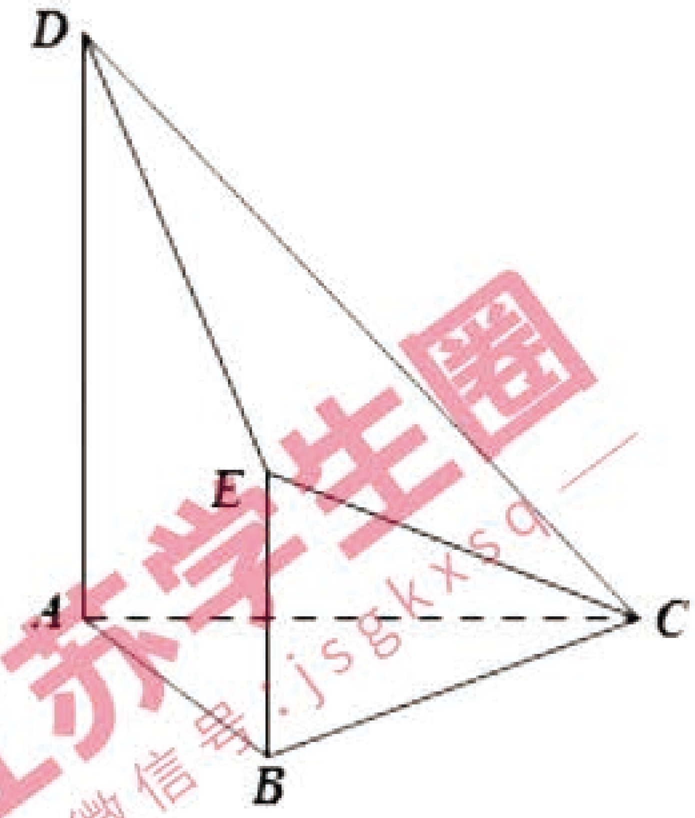
X	7	11	15
P	$\frac{5}{19}$	$\frac{10}{19}$	$\frac{4}{19}$

$$E(X)=7\times\frac{5}{19}+11\times\frac{10}{19}+15\times\frac{4}{19}=\frac{205}{19}.$$

20.（12分）如图，在五面体$ABCDE$中，$BE\perp$平面ABC，$AD\parallel BE$，$AD=2BE$，$AB=BC$.

（1）求证：平面$CDE\perp$平面ACD；

（2）若$AB=\sqrt{3}$，$AC=2$，五面体$ABCDE$的体积为$\sqrt{2}$，求平面CDE与平面$ABED$所成角的余弦值.



【解析】

（1）取AC中点M，连接BM，$\because AB=BC$，$\therefore BM\perp AC$，

又$\because AD\perp$平面ABC，$\therefore AD\perp BM$，$AC\cap AD=A$，

$\therefore BM\perp$平面ACD，取CD中点F，连接MF,EF，

$\therefore MF\underline{\underline{/\!/}}\frac{1}{2}AD$，又$\because BE\underline{\underline{/\!/}}\frac{1}{2}AD$，$\therefore MF\underline{\underline{/\!/}}BE$，

$\therefore$四边形$BMFE$为平行四边形，$\therefore EF/\!/BM$.

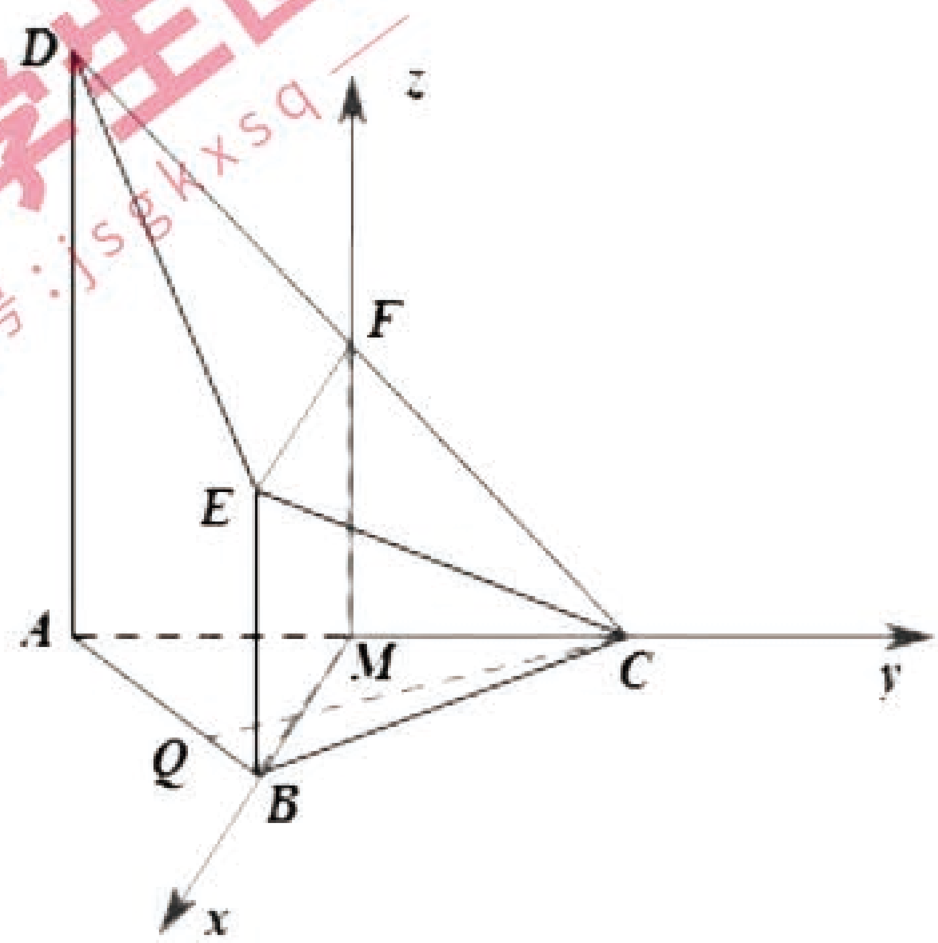
$\therefore EF\perp$平面ACD，又$\because EF\subset$平面CDE，$\therefore$平面$CDE\perp$平面ACD.

（2）$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot CQ\Rightarrow CQ=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

设$BE=x$，$\therefore AD=2x$，$V_{五面体ABCDE}=\frac{1}{3}S_{梯形ABED}\cdot CQ$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{(x+2x)\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3}=\sqrt{2}\Rightarrow x=1$.

如图建系，$\therefore C(0,1,0)$，$D(0,-1,2)$，$E(\sqrt{2},0,1)$，$A(0,-1,0)$，$B(\sqrt{2},0,0)$，



$\overrightarrow{CD}=(0,-2,2)$，$\overrightarrow{DE}=(\sqrt{2},1,-1)$，$\overrightarrow{AD}=(0,0,2)$.

设平面CDE与平面$ABED$的一个法向量分别为$\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1),\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，

$$\therefore\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{CD}=0\\\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{DE}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2y_1+2z_1=0\\\sqrt{2}x_1+y_1-z_1=0\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{n_1}=(0,1,1)，$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{DE}=0\\\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{AD}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{2}x_2+y_2-z_2=0\\2z_2=0\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{n_2}=(1,-\sqrt{2},0)，$$

设平面CDE与平面$ABED$所成角为θ，$\therefore\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

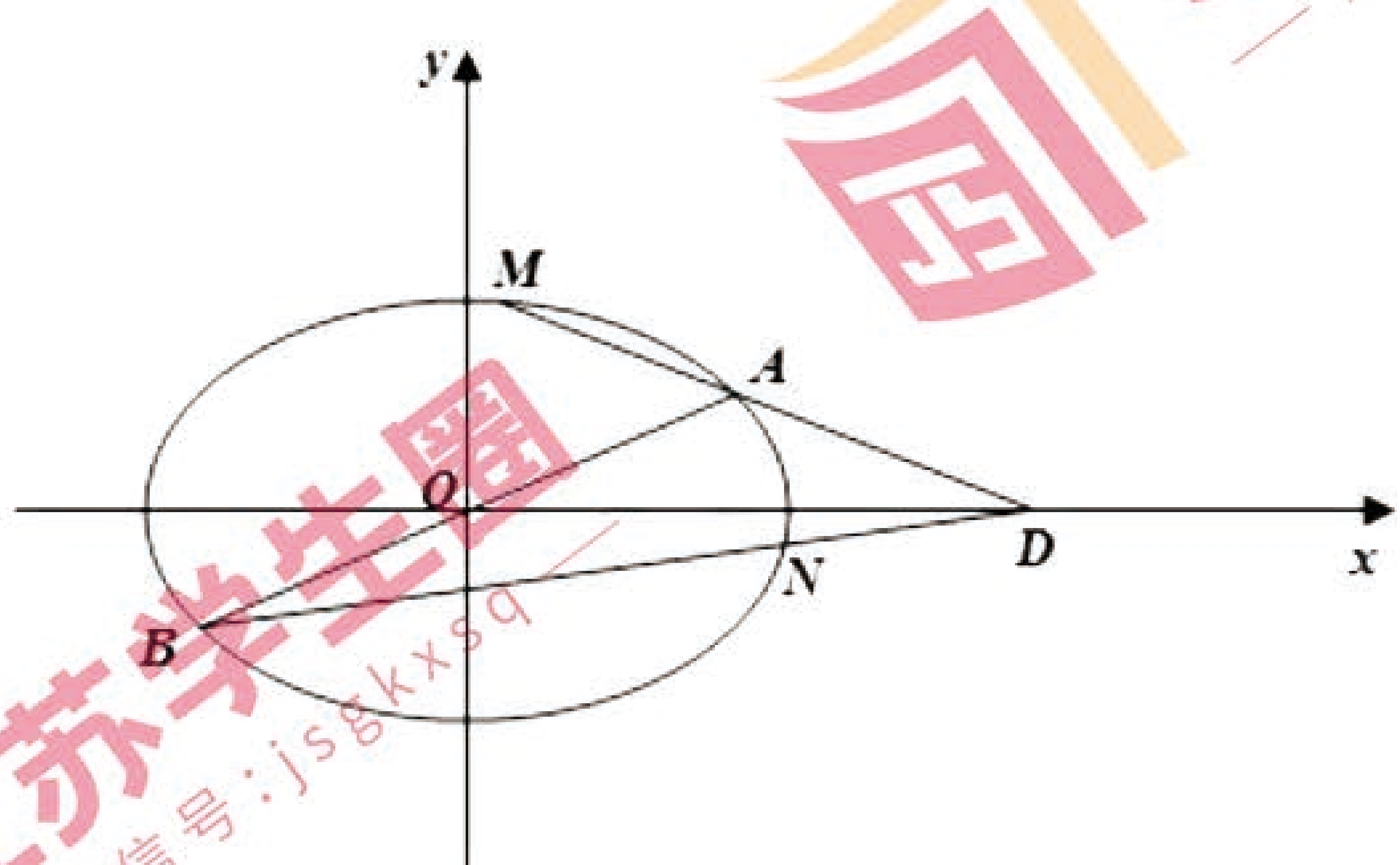
21．（12分）已知A,B是椭圆$C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$上关于坐标原点$O$对称的两点，点$D(4,0)$，连结$DA$并延长交$C$于点$M$，连结$DB$交$C$于点$N$.

（1）若A为线段DM的中点，求点A的坐标；

（2）设$\triangle DMN$，$\triangle DAB$的面积分别为S_1,S_2，若$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{3}{7}$，求线段$OA$的长.

【解析】

（1）设$A(x_0,y_0)$，$\therefore M(2x_0-4,2y_0)$



由A,M均在椭圆C上，$\therefore\begin{cases}\dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{3}=1\\\dfrac{(2x_0-4)^2}{4}+\dfrac{4y_0^2}{3}=1\end{cases}\Rightarrow x_0=\dfrac{7}{4}$，$y_0=\pm\dfrac{3\sqrt{5}}{8}$，

$\therefore A\left(\frac{7}{4},\pm\frac{3\sqrt{5}}{8}\right)$.

(2) 设 DA 方程为 $x=my+4$ ，$A(x_0,y_0),B(-x_0,-y_0),D(4,0)$ ，$m=\frac{x_0-4}{y_0}$ ，

$\begin{cases}x=my+4\\3x^2+4y^2=12\end{cases}\Rightarrow 3(m^2y^2+8my+16)+4y^2=12$ ，$(3m^2+4)y^2+24my+36=0$ ，

$\therefore y_M\cdot y_0=\frac{36}{3m^2+4}=\frac{36}{3\cdot\left(\frac{x_0-4}{y_0}\right)^2+4}=\frac{36y_0^2}{3(x_0^2-8x_0+16)+4y_0^2}=\frac{36y_0^2}{60-24x_0}=\frac{3y_0^2}{5-2x_0}$ ，

$\therefore y_M=\frac{3y_0}{5-2x_0}$.

同理 $y_N\cdot y_B=\frac{36}{3\left(\frac{x_0+4}{y_0}\right)^2+4}=\frac{36y_0^2}{3(x_0^2+8x_0+16)+4y_0^2}=\frac{36y_0^2}{60+24x_0}=\frac{3y_0^2}{5+2x_0}$

$\therefore y_N=\frac{-3y_0}{5+2x_0}$ ，$\therefore\frac{S_1}{S_2}=\frac{S_{\triangle DMN}}{S_{\triangle DAB}}=\frac{\frac{1}{2}DM\cdot DN\sin\angle MDN}{\frac{1}{2}DA\cdot DB\sin\angle ADB}$

$=\frac{DM}{DA}\cdot\frac{DN}{DB}=\frac{y_M}{y_0}\cdot\frac{y_N}{-y_0}=\frac{9}{(5-2x_0)(5+2x_0)}=\frac{9}{25-4x_0^2}=\frac{3}{7}$ ，$\therefore x_0^2=1$.

而 $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1\Rightarrow y_0^2=\frac{9}{4}$ ，$\therefore|OA|=\sqrt{x_0^2+y_0^2}=\sqrt{1+\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{13}}{2}$.

22 .（12 分）已知函数 $f(x)=me^x-\frac{3}{2}x^2-2x$.

（1）当 $m\geq3$ 时，证明：$f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增；

（2）若函数 $g(x)=f(x)-\cos x$ 存在两个不同的极值点，求实数 m 的取值范围.

【解析】

（1）$f'(x)=me^x-3x-2$ ，$f''(x)=me^x-3=0\Rightarrow x=\ln\frac{3}{m}$ ，

且当 $x<\ln\frac{3}{m}$ 时，$f''(x)<0,f'(x)\searrow$ ；当 $x>\ln\frac{3}{m}$ 时，$f''(x)>0,f'(x)>$

$\therefore f'(x) \geq f'\left(\ln\dfrac{3}{m}\right) = m\cdot\dfrac{3}{m} - 3\ln\dfrac{3}{m} - 2 = 1 - 3\ln\dfrac{3}{m} > 0$ ，

$\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

（2）$g(x) = me^x - \dfrac{3}{2}x^2 - 2x - \cos x$ ，

$g'(x) = me^x - 3x - 2 + \sin x = e^x\left(m - \dfrac{3x+2-\sin x}{e^x}\right)$ ，

$\because g(x)$ 存在两个不同的极值点，$\therefore g'(x)$ 存在两个不同的变号零点，

令 $h(x) = m - \dfrac{3x+2-\sin x}{e^x}$ ，$h'(x) = -\dfrac{(3-\cos x)e^x - e^x(3x+2-\sin x)}{e^{2x}}$

$= -\dfrac{1-3x-\cos x+\sin x}{e^x}$ ，令 $\varphi(x) = 1 - 3x - \cos x + \sin x$ ，

$\varphi'(x) = -3 + \sin x + \cos x = -3 + \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) < 0$ ，$\varphi(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↘.

注意到 $\varphi(0) = 0$ ，$\therefore$ 当 $x < 0$ 时，$\varphi(x) > 0$ ，$h'(x) < 0, h(x)$ ↘；

当 $x > 0$ 时，$\varphi(x) < 0$ ，$h'(x) > 0, h(x)$ ↗ ，$\therefore h(x)_{\min} = h(0) = m - 2$.

要使 $h(x)$ 有两个不同的变号零点，则 $h(x)_{\min} = m - 2 < 0, m < 2$.

且当 $x \to -\infty$ 时，$h(x) \to +\infty$ ，当 $x \to +\infty$ 时，$h(x) \to m$ ，$\therefore m > 0$.

综上：$0 < m < 2$ ，即 m 的取值范围为 $(0,2)$.

3．命题“$\forall x\in[1,2]$，$x^2-a\le 0$”是真命题的一个必要不充分条件是

A．$a>4$　　B．$a\ge 4$　　C．$a<1$　　D．$a\ge 1$

【答案】D

【解析】“$\forall x\in[1,2],x^2-a\le 0$”为真命题$\Leftrightarrow a\ge 4$，$\therefore$“$\forall x\in[1,2],x^2-a\le 0$”成立的一个必要不充分条件为$a\ge 1$，选 D.

4．任何一个复数$z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$都可以表示成$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)(r\ge 0,\theta\in\mathbf{R})$的形式，通常称之为复数$z$的三角形式．法国数学家棣莫弗发现：$[r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)(n\in\mathbf{Z})$，我们称这个结论为棣莫弗定理．则$(1-\sqrt{3}\mathrm{i})^{2022}=$

A．1　　B．2^{2022}　　C．-2^{2022}　　D．i

【答案】B

【解析】$1-\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$，

$(1-\sqrt{3}\mathrm{i})^{2022}=2^{2022}\left[\cos\left(-\frac{2022}{3}\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{2022}{3}\pi\right)\right]=2^{2022}$，选 B.

5．已知函数$f(x)$同时满足下列条件：①定义域为$\mathbf{R}$；②$f(1)=1$；③$f(x+1)$为偶函数；④$f(2-x)=-f(2+x)$，则$f(-2)+f(7)=$

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

【答案】A

【解析】$f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$满足①②③④（③表示$f(x)$关于$x=1$对称，④表示$f(x)$关于$(2,0)$对称），$f(-2)+f(7)=0+(-1)=-1$，选 A.

6．在$\triangle ABC$中，已知$A=60°$，$BC=2$，D为BC的中点，则线段AD长度的最大值为

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

【答案】C

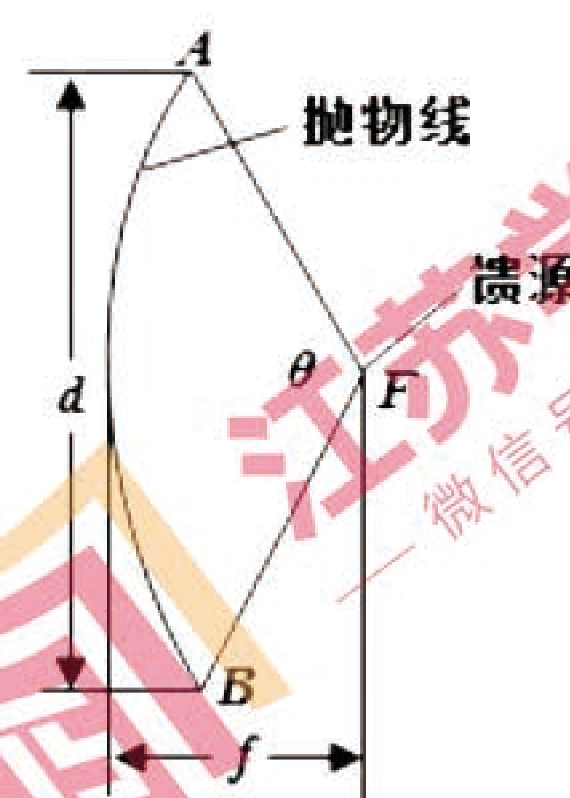
【解析】$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-bc$，即 $4=b^2+c^2-bc$，即 $b^2+c^2=4+bc$，

$4=b^2+c^2-bc\ge bc$，$\therefore bc\le 4$，$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，$\overrightarrow{AD}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})$

$=\frac{1}{4}\left(c^2+b^2+2cb\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}(b^2+c^2+bc)=\frac{1}{4}(4+bc+bc)\le\frac{1}{4}(4+8)=3$，

$\therefore\left|\overrightarrow{AD}\right|\le\sqrt{3}$，选 C.

7．如图 1 所示，抛物面天线是指由抛物面（抛物线绕其对称轴旋转形成的曲面）反射器和位于焦点上的照射器（馈源，通常采用喇叭天线）组成的单反射面型天线，广泛应用于微波和卫星通讯等领域，具有结构简单、方向性强、工作频带宽等特点.图 2 是图 1 的轴截面，A,B 两点关于抛物线的对称轴对称，F 是抛物线的焦点，$\angle AFB$ 是馈源的方向角，记为 θ，焦点 F 到顶点的距离 f 与口径 d 的比值 $\frac{f}{d}$ 称为抛物面天线的焦径比，它直接影响天线的效率与信噪比等.如果某抛物面天线馈源的方向角 θ 满足 $\tan\theta=-4\sqrt{5}$，则其焦径比为

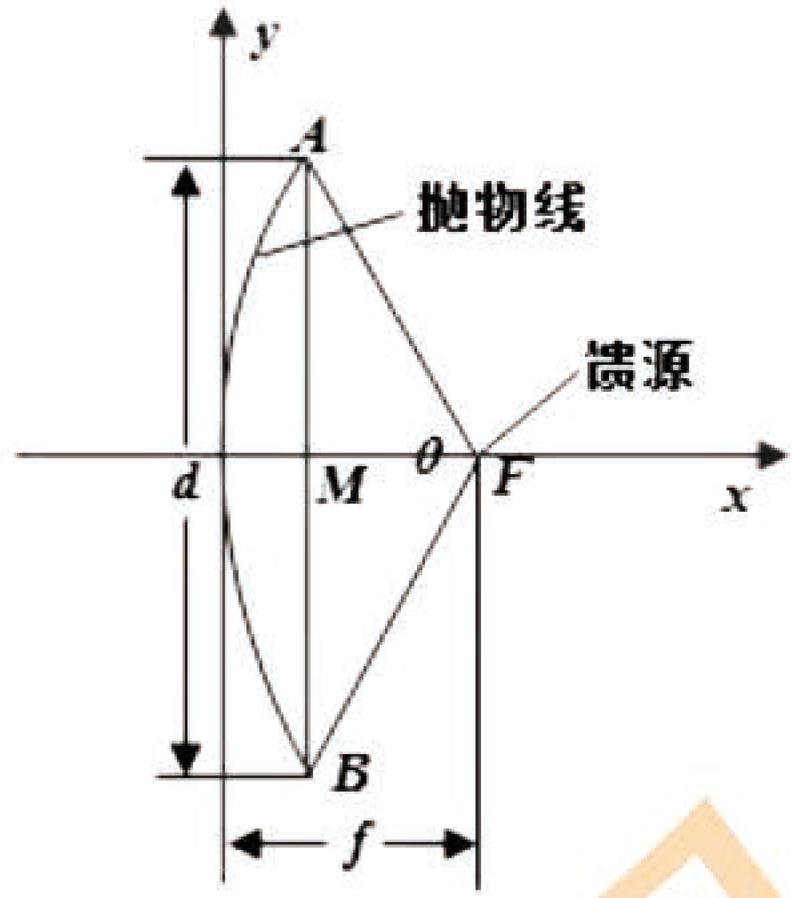


A．$\frac{\sqrt{10}}{4}$　　B．$\frac{\sqrt{5}}{4}$　　C．$\frac{\sqrt{10}}{8}$　　D．$\frac{\sqrt{5}}{8}$

【答案】B

【解析】$\tan\theta=-4\sqrt{5}=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$，$\therefore\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ 或 $-\frac{2}{\sqrt{5}}$（舍）

$\frac{AM}{MF}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，即 $MF=\frac{2\sqrt{5}AM}{5}$，令抛物线方程：$y^2=2px$，则 $f=\frac{p}{2}$



$\therefore \dfrac{d^2}{4}=2p\left(\dfrac{p}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{5}d\right)$，$\dfrac{d^2}{4}=4f\left(f-\dfrac{\sqrt{5}}{5}d\right)$，$\therefore 80f^2-16\sqrt{5}fd-5d^2=0$，

即 $80\left(\dfrac{f}{d}\right)^2-16\sqrt{5}\dfrac{f}{d}-5=0$，$\dfrac{f}{d}=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$，选 B.

8．已知 $a\ln a=1$，$m=e^{\frac{1}{2}+a}$，$e^n=3^a$，$a^p=2^e$，则

A．$n<p<m$　　B．$p<n<m$　　C．$n<m<p$　　D．$m<p<n$

【答案】A

【解析】$f(x)=x\ln x$，$f'(x)=\ln x+1=0$，$x=\dfrac{1}{e}$，$f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)\searrow$，$\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)\nearrow$，

$f(1)=0<1$，$f(e)=e>1$，$a\ln a=1$，则 $a\in(1,e)$，$m=e^{\frac{1}{2}+a}\in\left(e^{\frac{3}{2}},e^{\frac{1}{2}+e}\right)$，

$n=a\ln 3\in(\ln 3,e\ln 3)$，$e^{\frac{3}{2}}>e\ln 3$，$\therefore m>n$，排除 D.

$p\ln a=e\ln 2$，则 $\dfrac{p}{a}=e\ln 2$，$p=ae\ln 2$，$e\ln 2>\ln 3$，$\therefore p>n$，排除 B.

比较 $e^{\frac{1}{2}+a}$ 与 $ae\ln 2$ 大小，先比较 $e^{a-\frac{1}{2}}$ 与 $a\ln 2$ 大小，$e^{a-\frac{1}{2}}>a+\dfrac{1}{2}>a\ln 2+\dfrac{1}{2}>a\ln 2$，

$\therefore m>p$，综上 $m>p>n$，选 A.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9．在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 满足 $\overrightarrow{B_1P}=\lambda\overrightarrow{B_1D_1}(0\le\lambda\le1)$，则

A．若 $\lambda=1$，则 AP 与 BD 所成角为 $\dfrac{\pi}{4}$

B．若 $AP\perp BD$，则 $\lambda=\dfrac{1}{2}$

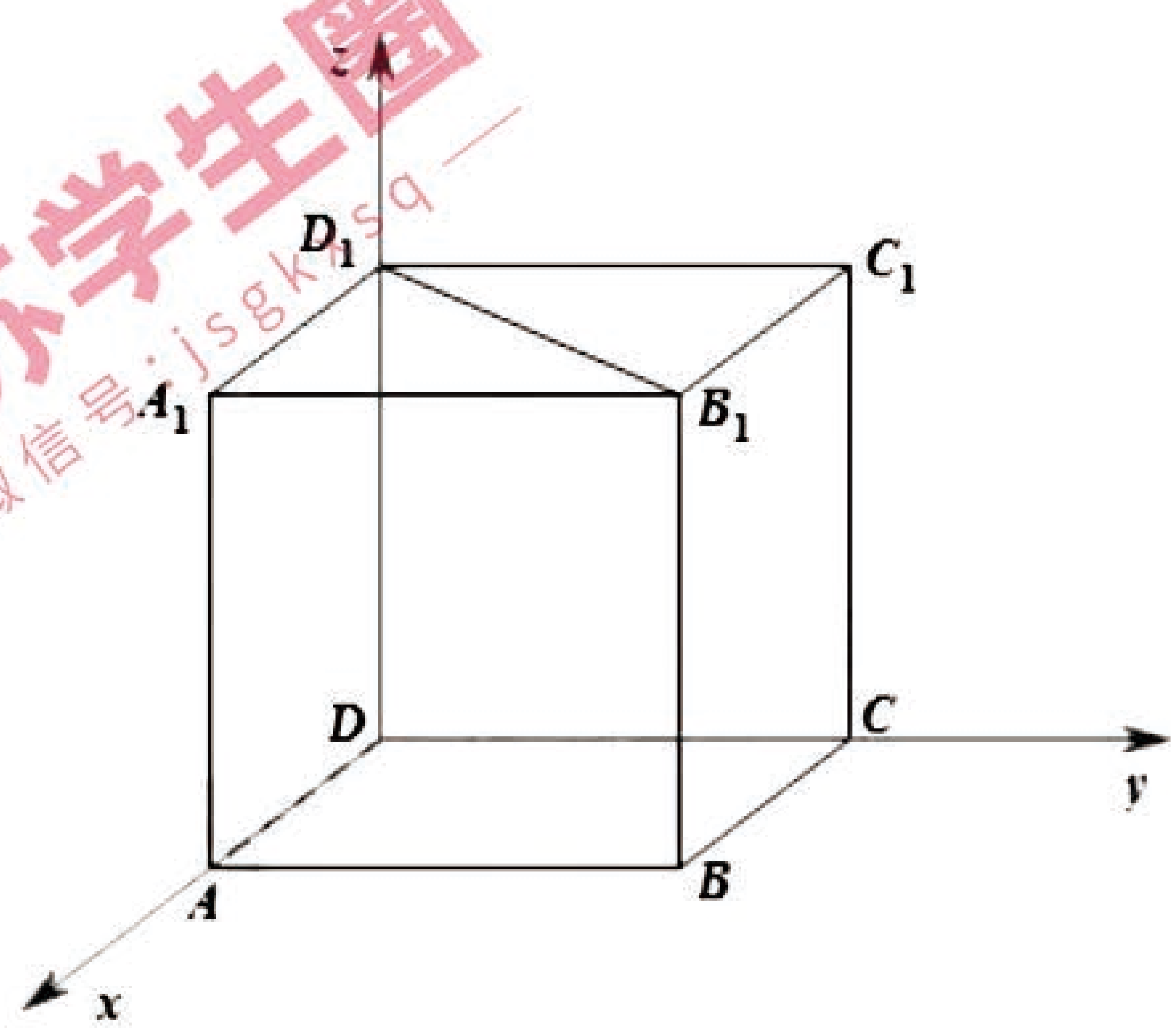
C．AP // 平面 BC_1D

D．$A_1C\perp AP$

【答案】BCD

【解析】$\lambda=1$ 时 P 与 D_1 重合，AD_1 与 B_1D_1 所成角为 60°，则 AP 与 BD 所成角为 60°，A 错.

如图建系，令 $AD=1$



$\overrightarrow{B_1P}=\lambda\overrightarrow{B_1D_1}$，$\therefore P(1-\lambda,1-\lambda,1)$，$\overrightarrow{AP}=(-\lambda,1-\lambda,1)$，$\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$，

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DB}=-\lambda+1-\lambda=0$，$\lambda=\dfrac{1}{2}$，B 对.

面 AD_1B_1 // 面 C_1BD，$AP\subset$ 平面 AD_1B_1，$\therefore AP$ // 平面 C_1BD，C 对.

$\overrightarrow{A_1C}=(-1,1,-1)$，$\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{AP}=\lambda+1-\lambda-1=0$，$\therefore A_1C\perp AP$，D 对.

10．下列命题中，正确的命题是

A．若事件 A,B 满足 $P(B\mid A)=\dfrac{1}{3}$，$P(A)=\dfrac{2}{5}$，则 $P(AB)=\dfrac{2}{15}$

B．设随机变量 ξ 服从正态分布 $N(0,1)$，若 $P(\xi>-1)=p$，则 $P(0<\xi<1)=\dfrac{1-p}{2}$

C．若事件 A,B 满足 $0<P(A),P(B)<1$，$P(A\overline{B})=P(A)[1-P(B)]$，则 A 与 B 独立

C．$\triangle F_1AF_2$ 的周长为 $2\sqrt{5}+2$　　　　D．$\triangle F_1AB$ 的内切圆半径为 $\sqrt{5}-\sqrt{3}$

【答案】ABD

【解析】$\begin{cases}\dfrac{\frac{15}{4}}{a^2}-\dfrac{\frac{1}{4}}{b^2}=1\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\\ c^2=a^2+b^2\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}a=\sqrt{3}\\ b=1\\ c=2\end{cases}$，$\therefore$双曲线 $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$，A 对.

$F_1(-2,0),F_2(2,0)$，$\overrightarrow{F_1A}=\left(\dfrac{\sqrt{15}}{2}+2,\dfrac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{F_2A}=\left(\dfrac{\sqrt{15}}{2}-2,\dfrac{1}{2}\right)$，

$\overrightarrow{F_1A}\cdot\overrightarrow{F_2A}=\dfrac{15}{4}-4+\dfrac{1}{4}=0$，$\therefore F_1A\perp F_2A$，B 对.

$AF_1=\sqrt{5}+\sqrt{3}$，$AF_2=\sqrt{5}-\sqrt{3}$，$F_1F_2=2c=4$，周长 $=2\sqrt{5}+4$，C 错.

令 $BF_2=m$，则 $BF_1=2\sqrt{3}+m$，$BF_1^2=AF_1^2+AB^2$，$\therefore m=\dfrac{3\sqrt{3}+\sqrt{5}}{11}$，

内切圆半径 $r=\dfrac{2S_{\triangle AF_1B}}{AF_1+AB+BF_2}=\dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3}+m)}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}+m+2\sqrt{3}+m}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$，D 对.

选 ABD.

12．已知 O 为坐标原点，曲线 $y=\ln x$ 在点 $P(x_1,y_1)$ 处的切线与曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 相切于点 $Q(x_2,y_2)$，则

A．$x_1y_2=1$　　　　B．$\dfrac{x_1+1}{x_1-1}+x_2=0$

C．$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 的最大值为 0　　　　D．当 $x_2<0$ 时，$x_1+x_2>\mathrm{e}^2-2$

【答案】AB

【解析】$P(x_1,\ln x_1)$，$y'=\dfrac{1}{x}$，$k=\dfrac{1}{x_1}$，切线：$y-\ln x_1=\dfrac{1}{x_1}(x-x_1)$，即 $y=\dfrac{1}{x_1}x-1+\ln x_1$，

$Q(x_2,\mathrm{e}^{x_2})$，$y'=\mathrm{e}^x$，$k=\mathrm{e}^{x_2}$，切线：$y-\mathrm{e}^{x_2}=\mathrm{e}^{x_2}(x-x_2)$，即 $y=\mathrm{e}^{x_2}x+\mathrm{e}^{x_2}(1-x_2)$， D．某小组调查5名男生和5名女生的成绩，其中男生平均数为9，方差为11；女生的平均数为7，方差为8，则该10人成绩的方差为9.5

【答案】AC

【解析】$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(AB)}{\dfrac{2}{5}}=\dfrac{1}{3}$，$\therefore P(AB)=\dfrac{2}{15}$，A 对.

$\xi \sim N(0,1)$，$P(\xi>-1)=p$，则$P(-1<\xi<0)=p-\dfrac{1}{2}$，$P(0<\xi<1)=p-\dfrac{1}{2}$，B 错.

$P(A\overline{B})=P(A)[1-P(B)]=P(A)P(\overline{B})$，$A$与$\overline{B}$独立，则$A$与$B$对立，C 对.

男生成绩设为x_1,x_2,x_3,x_4,x_5，$\therefore \sum_{i=1}^{5}x_i=45$，

$11=\dfrac{1}{5}[(x_1-9)^2+(x_2-9)^2+(x_3-9)^2+(x_4-9)^2+(x_5-9)^2]$，$\therefore \sum_{i=1}^{5}x_i^2=460$.

女生成绩设为x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10}，$\therefore \sum_{i=6}^{10}x_i=35$，

$8=\dfrac{1}{5}[(x_6-7)^2+(x_7-7)^2+(x_8-7)^2+(x_9-7)^2+(x_{10}-7)^2]$，$\therefore \sum_{i=6}^{10}x_i^2=285$.

$S^2=\dfrac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i-8)^2=\dfrac{1}{10}[460+285-16(45+35)+64\times 10]=10.5$，D 错.

有这样一个结论：m个数据平均数$\overline{x}$，方差S_1^2，n个数据平均数$\overline{y}$，方差S_2^2，

结合在一起后平均数为$\overline{z}=\dfrac{m\overline{x}+n\overline{y}}{m+n}$，方差$=\dfrac{1}{m+n}[m(S_1^2+(\overline{x}-\overline{z})^2)+n(S_2^2+(\overline{y}-\overline{z})^2)]$

$\therefore$此题$S^2=\dfrac{1}{10}[5(11+(9-8)^2)+5(8+(7-8)^2)]=10.5$，如此计算量大大减小.

11．已知F_1,F_2是双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点，$A\left(\dfrac{\sqrt{15}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$是$C$上一点.若$C$的离心率为$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，连结$AF_2$交$C$于点$B$，则

A．C的方程为$\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$　　　　B．$\angle F_1AF_2=90^\circ$

切线重合，$\therefore \begin{cases} \dfrac{1}{x_1} = e^{x_2}, ① \\ \ln x_1 - 1 = e^{x_2}(1-x_2), ② \end{cases}$ 由①知 $x_1 e^{x_2} = 1$ 即 $x_1 y_2 = 1$，A 对.

由①②知 $-x_2 - 1 = \dfrac{1}{x_1}(1-x_2)$，$x_1 \neq 1$，$-x_1x_2 - x_1 = 1 - x_2$，$\therefore x_1x_2 - x_2 + x_1 + 1 = 0$，

$x_2 + \dfrac{x_1+1}{x_1-1} = 0$，B 对.

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = x_1x_2 + y_1y_2 = x_1(-\ln x_1) + (\ln x_1)e^{x_2} = -x_1\ln x_1 + \dfrac{\ln x_1}{x_1} = \left(\dfrac{1}{x_1} - x_1\right)\ln x_1$，

$0 < x_1 < 1$ 时 $\dfrac{1}{x_1} - x_1 > 0$，$\ln x_1 < 0$，$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} < 0$，$x_1 > 1$ 时，$\dfrac{1}{x_1} - x_1 < 0, \ln x_1 > 0$，

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} < 0$，$x_1 \neq 1$，$\therefore \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} < 0$，C 错.

$f(x) = e^x(-x+1), x < 0$，$f'(x) = e^x(-x) > 0$，$f(x)$ 在 $(-\infty, 0) \nearrow$，$0 < f(x) < 1$，

由②知 $\ln x_1 - 1 \in (0,1)$，$\therefore e < x_1 < e^2$，$g(x) = x - \ln x$，$g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x} > 0$，

$g(x)$ 在 $(e, e^2) \nearrow$，$g(x) < g(e^2) = e^2 - 2$，$x_1 + x_2 = x_1 - \ln x_1 < e^2 - 2$，D 错.

选 AB.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．已知函数 $f(x) = \begin{cases} (x+1)^5, x > 1, \\ x^2 + 2, x \leq 1, \end{cases}$ 则当 $0 < x < 1$ 时，$f(f(x))$ 的展开式中 x^4 的系数为________.

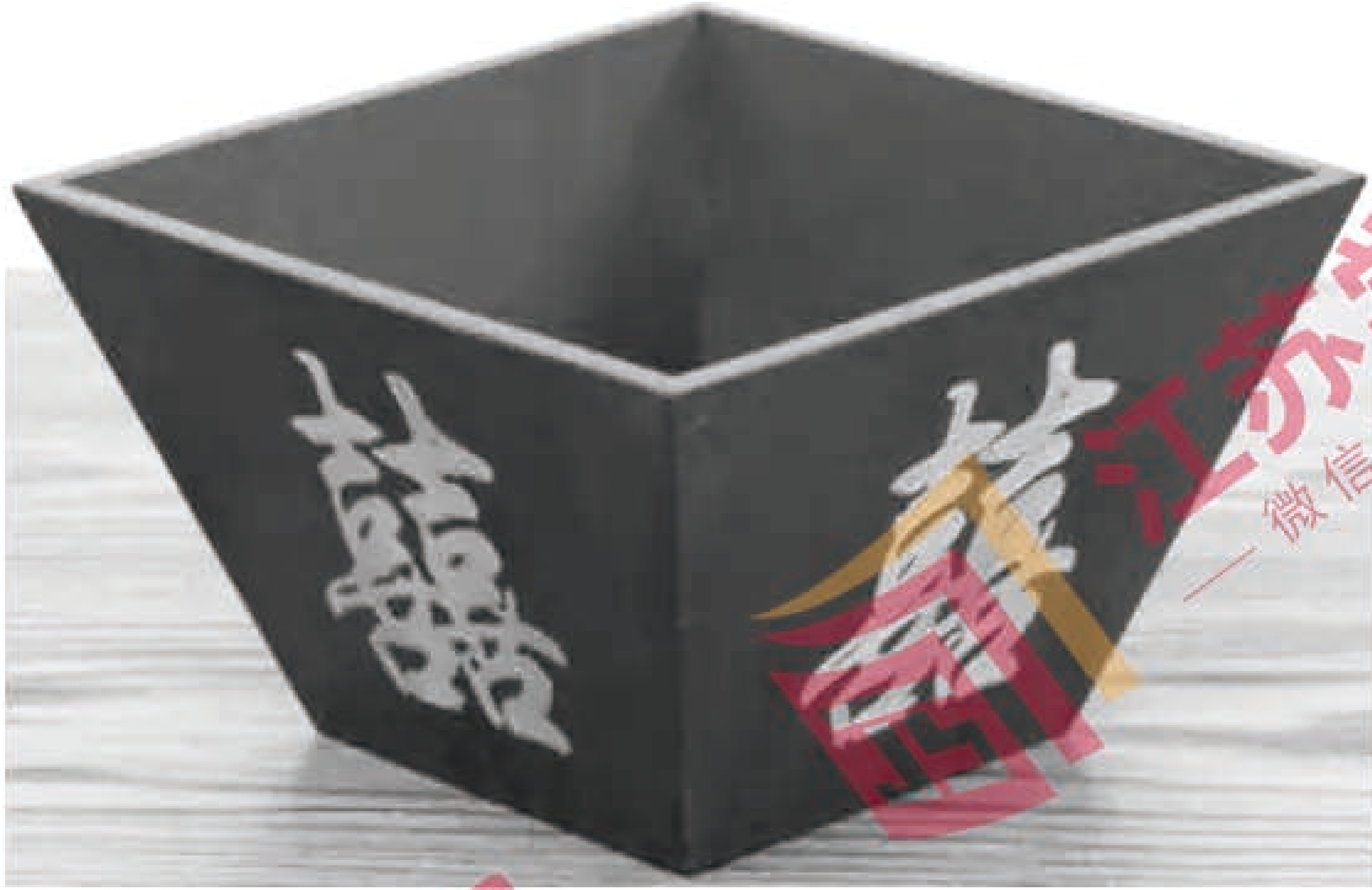
【答案】270

【解析】$0 < x < 1$ 时，$f(x) = x^2 + 2 \in [2,3)$，$f(f(x)) = f(x^2+2) = (x^2+3)^5$，

展开式第 $r+1$ 项 $T_{r+1} = C_5^r (x^2)^{5-r} 3^r$，$r = 3$ 时，$T_4 = C_5^3 x^4 3^3 = 270x^4$，$\therefore x^4$ 的系数 270.

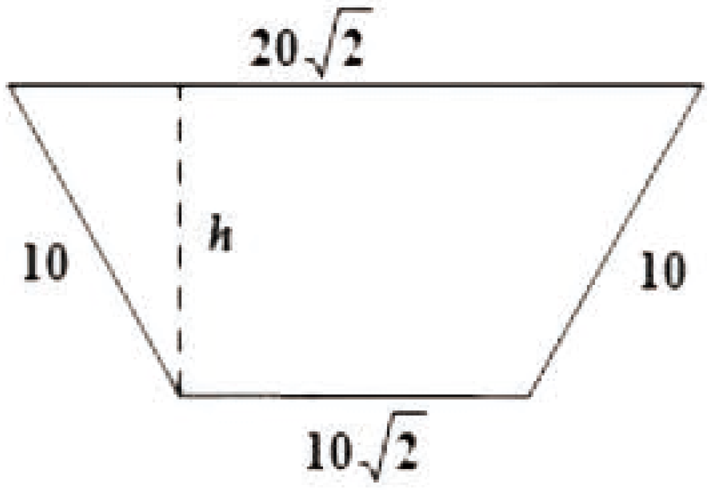
14．中国某些地方举行婚礼时要在吉利方位放一张桌子，桌子上放一个装满粮食的升斗，斗面用红纸糊住，斗内再插一杆秤、一把尺子，寓意粮食满园、称心如意、十全十美，下图为一种婚庆升斗的规格，该升斗外形是一个正四棱台，上、下底边边长分别为 20 cm，10 cm，侧

棱长为10 cm，忽略其壁厚，则该升斗的容积约为__________ cm^3.（参考数据：$\sqrt{2}\approx 1.41$）



【答案】$\dfrac{3500\sqrt{2}}{3}$

【解析】$h=5\sqrt{2}$，$V=\dfrac{1}{3}(400+100+\sqrt{400\times 100})5\sqrt{2}=\dfrac{3500\sqrt{2}}{3}$.



15．已知函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$，若 $f(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递增，则 ω 的取值范围是__________.

【答案】$\left(0,\dfrac{1}{4}\right]$

【解析】$f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)\nearrow$，$\therefore \pi-\dfrac{\pi}{2}\le\dfrac{T}{2}$，$\therefore \dfrac{\pi}{2}\le\dfrac{\pi}{\omega}$，$\therefore 0<\omega\le 2$，

$\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$，$\therefore \dfrac{\pi}{2}\omega+\dfrac{\pi}{4}<\omega x+\dfrac{\pi}{4}<\omega\pi+\dfrac{\pi}{4}$，$\begin{cases}0<\dfrac{\pi}{2}\omega+\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{\pi}{2}\\0<\omega\pi+\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，$\therefore 0<\omega\le\dfrac{1}{4}$，