

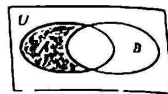
## 鹰潭市 2023 届高三第二次模拟考试 数学试题(理科)

命题人：严根斌 余江一中 审题人：丁国富 贵溪一中

### 第 I 卷 (选择题共 60 分)

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 如图，两个区域分别对应集合  $A, B$ ，其中  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ， $B = \{x \in \mathbf{N} | x < 4\}$



则阴影部分表示的集合 ( )

- A.  $\{0, 1, 2\}$       B.  $\{0, 1\}$       C.  $\{-2, -1, 2\}$       D.  $\{-2, -1\}$

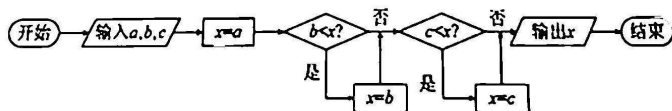
2. 若复数  $z$  满足  $i z = 2022 + i^{2023}$  ( $i$  是虚数单位)， $z$  的共轭复数是  $\bar{z}$ ，则  $z - \bar{z}$  的模是 ( )

- A.  $\sqrt{4044^2 + 4}$       B. 4044      C. 2      D. 0

3. 下列命题中错误的是 ( )

- A. 命题“ $\exists x_0 \in \mathbf{R}$ ， $x_0^2 + 1 < 1$ ”的否定是“ $\forall x \in \mathbf{R}$ ， $x^2 + 1 \geq 1$ ”  
 B. 命题“若  $a > b$ ，则  $2^a > 2^b - 1$ ”的否命题为“若  $a \leq b$ ，则  $2^a \leq 2^b - 1$ ”  
 C. “两直线斜率相等”是“两直线平行”的充要条件  
 D. 若“ $p$  或  $q$ ”为假命题，则  $p, q$  均为假命题

4. 已知  $a = \log_3 9$ ， $b = e^{\ln \frac{1}{2}}$ ， $c = \sqrt[3]{2}$  执行如图所示的程序框图，输出的值为 ( )



- A. 2      B.  $\frac{1}{2}$       C.  $\sqrt[3]{2}$       D. 1

5. 若  $\sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2\sqrt{2}\cos(\alpha + \frac{\pi}{4})|\sin\beta|$ ，则下列结论正确的为 ( )

- A.  $\tan(\alpha + \beta) = 1$       B.  $\tan(\alpha + \beta) = -1$       C.  $\tan(\alpha - \beta) = 1$       D.  $\tan(\alpha + \beta) = -1$

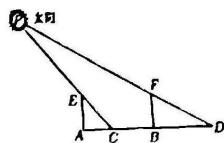
6. 已知等差数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1^2 + a_4^2 = 4$ ，则  $a_2 + a_3$  可能取的值是 ( )

- A. -2      B. -3      C. 4      D. 6

7. 《周髀算经》中记载了一种远距离测量的估算方法叫做“寸影千里”法，其具体方法是在同一天(如夏至)的正午，于两地分别竖起同高的标杆，然后测量标杆的影长，并根据“日影差一寸，实地相距千里”的原则推算两地距离。如图，某人在夏至的正午分别在同一水平面上的  $A, B$  两地竖起高度均为  $a$  寸的标杆  $AE$  与  $BF$ ， $AC$  与  $BD$  分别为标杆  $AE$  与  $BF$  在地面的影长，再按影长  $AC$  与  $BD$  的差结合“寸影千里”来推算  $A, B$  两地的距离。记  $\angle CEA = \alpha$ ， $\angle BDF = \beta$  ( $\beta < \frac{\pi}{2} - \alpha$ )，则

按照“寸影千里”的原则，A, B 两地的距离大约为 ( ) 里。

- A.  $\frac{1000a \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$       B.  $\frac{1000a \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cos \beta}$   
C.  $\frac{1000a \cos(\alpha + \beta)}{\sin \beta \cos \alpha}$       D.  $\frac{1000a \cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$



8. 已知直线  $l: y = kx - k + 2$  和圆  $M: x^2 + y^2 - 2x = 0$  满足对直线  $l$  上任意一点  $P$ ，在圆  $M$  上存在点  $Q$ ，使得  $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{MQ} = 0$ ，则实数  $k$  的取值范围是 ( )

- A.  $\{k | k \geq \sqrt{3}\}$       B.  $\{k | \sqrt{3} \leq k \leq \sqrt{3}\}$       C.  $\{k | k \geq 2\sqrt{3}\}$       D.  $\{k | -2\sqrt{3} \leq k \leq 2\sqrt{3}\}$

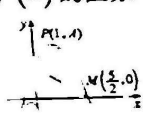
9. 已知直线  $l: \sqrt{3}x - y + m = 0$  经过椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左焦点  $F$ ，且直线  $l$  与  $y$  轴交于点  $P$ ，与椭圆  $C$  在第一象限内交于点  $A$ 。若  $|AF| = 3|AP|$ ，则椭圆  $C$  的离心率是 ( )

- A.  $\sqrt{3} - 1$       B.  $\sqrt{7} - 2$       C.  $3 - \sqrt{7}$       D.  $2 - \sqrt{3}$



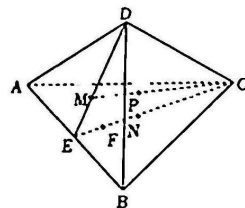
10. 已知函数  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) (A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$  的图象如图所示，图象与  $x$  轴的交点为  $M(\frac{5}{2}, 0)$ ，与  $y$  轴的交点为  $N$ ，最高点  $P(1, A)$ ，且满足  $NM \perp NP$ 。若将  $f(x)$  的图象向左平移 1 个单位得到的图象对应的函数为  $g(x)$ ，则  $g(2023) = ( )$

- A.  $\frac{\sqrt{10}}{2}$       B. 0      C.  $-\frac{\sqrt{10}}{2}$       D.  $\sqrt{10}$



11. 如图，在棱长为 2 的正四面体  $ABCD$  中，点  $N, M$  分别为  $\triangle ABC$  和  $\triangle ABD$  的重心， $P$  为线段  $CM$  上一点，( )

- A.  $AP + BP$  的最小为 2  
B. 若  $DP \perp$  平面  $ABC$ ，则  $\overrightarrow{CP} = \frac{\sqrt{6}}{4} \overrightarrow{CM}$   
C. 若  $DP \perp$  平面  $ABC$ ，则三棱锥  $P - ABC$  外接球的表面积为  $\frac{9\pi}{2}$   
D. 若  $F$  为线段  $EN$  的中点，且  $DP \parallel MF$ ，则  $MP = \frac{2}{5} MC$



12. 已知二进制和十进制可以相互转化，例如  $85 = 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$ ，则十进制 85 转化二进制位  $1010101_{(2)}$ 。若将正整数  $n$  对应的二进制中 0 的个数记为  $f(n)$ ，例如  $5 = 101_{(2)}, 57 = 111001_{(2)}, 85 = 1010101_{(2)}$ ，则  $f(5) = 1, f(57) = 2, f(85) = 3$ ，则下列结论正确的为 ( )

- A.  $f(2n+1) = f(n) + 1$       B.  $f(2n) = f(n) + 2$       C.  $f(8n+7) = f(4n+3)$       D.  $f(2^n - 1) = 1$

### 第 II 卷 (非选择题共 90 分)

二、填空题 (本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。将答案填在题中的横线上)

13. 在二项式  $(2x - \frac{1}{x^2})^6$  的展开式中，常数项为\_\_\_\_\_。

14. 冬奥会设有冬季两项、雪车、冰壶、雪橇, 滑冰, 滑雪、冰球 7 个大项, 现有甲、乙、丙三名志愿者, 设  $A$  表示事件为“甲不是雪车项目的志愿者, 乙不是雪橇项目的志愿者”,  $B$  表示事件为“甲、乙、丙分别是三个不同项目的志愿者”, 则  $P(A|B) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
15. 已知直线  $m: y = -1$ , 定点  $F(0, 1)$ ,  $P$  是直线  $x - y + \sqrt{2} = 0$  上的动点, 若经过点  $F, P$  的圆与直线  $m$  相切, 则这个圆的面积的最小值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .
16. 在  $\triangle ABC$  中,  $BC = 2, AB = 2AC$ ,  $D$  为  $BC$  的中点, 则  $\tan \angle ADC$  的最大值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

三、解答题: (共 70 分解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 12 分)

记  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项的和, 已知  $a_1 = 1$ ,  $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$  是公差为  $\frac{1}{2}$  的等差数列.

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 令  $b_n = 2^n$ , 记数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 试求  $T_{2n-1}$  除以 3 的余数.

18. (本小题满分 12 分)

某篮球队为提高队员训练的积极性, 进行小组投篮游戏; 每个小组由两名队员组成, 队员甲与队员乙组成一个小组. 游戏规则如下: 每个小组的两名队员在每轮游戏中分别投篮两次, 每小组投进的次数之和不少于 3 次的称为“神投小组”, 已知甲乙两名队员投进篮球的概率分别为  $p_1, p_2$ .

(1) 若  $p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{2}{3}$ , 求他们在第一轮游戏获得“神投小组”称号的概率;

(2) 已知  $p_1 + p_2 = \frac{6}{5}$ , 则:

①  $p_1, p_2$  取何值时能使得甲、乙两名队员在一轮游戏中获得“神投小组”称号的概率最大? 并求出此时的最大概率;

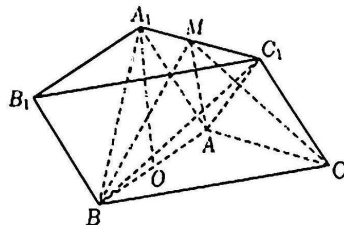
② 在第①问的前提下, 若甲、乙两名队员想要获得 297 次“神投小组”的称号, 则他们平均要进行多少轮游戏.

19. (本小题满分 12 分)

如图, 在三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $\triangle ABC$  是边长为 2 的正三角形, 顶点  $A_1$  在底面  $ABC$  的投影为  $AB$  的中点  $O$ , 已知  $AA_1$  与底面  $ABC$  内所有直线所成角中的最小值为  $\frac{\pi}{4}$ ,  $M$  为棱  $A_1C_1$  上一点.

(1) 求三棱锥  $A_1 - ABC_1$  的体积;

(2) 若  $A_1C_1 = 3A_1M$ , 求二面角  $A - BM - C$  大小的正弦值.



20. (本小题满分 12 分)

已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  过点  $A(3, -\sqrt{2})$ , 且渐近线方程为  $x \pm \sqrt{3}y = 0$

(1) 求双曲线  $C$  的方程;

(2) 如图, 过点  $B(1, 0)$  的直线  $l$  交双曲线  $C$  于点  $M, N$ , 直线  $MA, NA$  分别交直线  $x = 1$  于点

$P, Q$ , 求  $\frac{|PB|}{|BQ|}$



21. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = -\frac{(\ln x)^2}{2} + x + \ln x - 1$ ,  $g(x) = (x-1)e^x - \frac{ax^2}{2} + a^2$ ,  $a < 1$ .

(1) 判断  $f(x)$  的单调性;

(2) 若  $g(x)$  有唯一零点, 求  $a$  的取值范围.

选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做, 则按所做的第一题计分。

22. [选修 4—4: 坐标系与参数方程] (本小题满分 10 分)

在平面直角坐标系  $xOy$  中, 以原点  $O$  为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线  $C_1$  的

极坐标方程为  $\rho = 2\cos\theta$ , 曲线  $C_2$  的极坐标方程为  $\rho = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5+3\cos 2\theta}}$ .

(1) 写出曲线  $C_2$  的参数方程;

(2) 设  $A$  是曲线  $C_1$  上的动点,  $B$  是曲线  $C_2$  上的动点, 求  $A, B$  之间距离的最大值.

23. [选修 4—5: 不等式选讲] (本小题满分 10 分)

已知  $m > 0$ ,  $n > 0$ ,  $m^2 + n^2 = 4m^2n^2$ .

(1) 证明:  $\left(m^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{2}}\right)\left(m^{\frac{3}{2}} + n^{\frac{3}{2}}\right) \geq 2$ ;

(2) 证明:  $\frac{1}{m^4} + \frac{1}{n^4} \geq 8$ .

(理科)

第 4 页 (共 4 页)

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。

