高三数学试题参考答案

一、选择题(本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1.B 2.C 3.D 4.A 5.D 6.A 7.D 8.B

二、多项选择题(共4小题,每小题至少2个以上的答案正确,错选0分,漏选2分,全对5分,共20分)

9.BC 10.ACD 11.ABD 12.AD

三、填空题(共4个小题,每小题5分,本题满分20分)

13.1 14.A 15.$\frac{7}{4}$ 16.$2^{n-1}+1$ $2-\frac{4}{2^n+1}$

四、解答题(本题共6小题,共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17.解:(1)根据题意,$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ ………………………… 2分

则$|\boldsymbol{a}|=|3\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2|=\sqrt{(3\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2)^2}=\sqrt{37}$ ………………………… 4分

(2)根据题意,$\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,则有$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=0$ ………………………… 5分

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(3\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2)(2\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2)=6+4\lambda+(8+3\lambda)\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=10+\frac{11}{2}\lambda$ ………………………… 7分

而$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=37+10+\frac{11}{2}\lambda$, ………………………… 8分

所以$11\lambda+94=0$,$\lambda=-\frac{94}{11}$ ………………………… 10分

18.解:(1)因为$\sin B-\sin C=\sin C-\sqrt{3}\cos B$,

所以$\sin B+\sqrt{3}\cos B=2\sin C$,

即$\sin(B+\frac{\pi}{3})=\sin C$, ………………………… 2分

因为$b>c$,

所以$B>C$, ………………………… 4分

所以$B+\frac{\pi}{3}+C=\pi$,$B+C=\frac{2\pi}{3}$,即$A=\frac{\pi}{3}$ ………………………… 6分

(2)因为$\triangle ABC$的面积为$\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$, ………………………… 7分

又因为$A=\frac{\pi}{3}$,所以$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$bc=2$, ………………………… 8分

又由余弦定理可得,$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-2bc-3}{2bc}=\frac{1}{2}$, ………………………… 10分

所以 $\frac{1}{2}=\frac{(b+c)^2-4-3}{4}$，可得 $b+c=3$。……………………………………11分

所以三角形 ABC 周长为 $3+\sqrt{3}$ ……………………………………12分

19. 解：因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，即 $\log_a\frac{2+x}{-x-m}=-\log_a\frac{2-x}{x-m}$。……………1分

即 $\frac{2+x}{-x-m}=\frac{x-m}{2-x}$ 恒成立，整理得：$4-x^2=m^2-x^2$，解得 $m=-2$ 或 $m=2$。……2分

当 $m=2$ 时，不满足，$m=-2$ 时成立，所以 $f(x)=\log_a\frac{2-x}{x+2}$ ……………………………3分

(1)因为 $f(x)<0$，$a>1$，所以 $0<\frac{2-x}{x+2}<1$，……………………………………4分

解得 $0<x<2$ ……………………………………6分

(2) $f(x)$ 定义域为 $\{x|-2<x<2\}$，由 $f(x)>1$，得 $\frac{2-x}{x+2}>a$，而 $x+2>0$，整理得

$(a+1)x<2-2a$。……………………………………8分

因为 $\frac{2-2a}{a+1}>-2$，所以 $-2<x<\frac{2-2a}{a+1}$ ……………………………………10分

又因为 $x\in\left(t,-\frac{2}{3}\right)$，所以 $\begin{cases}t=-2\\ \frac{2-2a}{a+1}=-\frac{2}{3}\end{cases}$，……………………………………11分

解得 $t=-2$，$a=2$，所以 $a-t=4$。……………………………………12分

20. 解：(1) x 千件的商品售价为 $50x$ 万元，

当 $0<x<50$ 时，$L(x)=50x-\frac{1}{2}x^2-10x-200=-\frac{1}{2}x^2+40x-200$；……………2分

当 $x\geq50$ 时，$L(x)=50x-(52x+\frac{7200}{x+1}-1200)-200=1000-(2x+\frac{7200}{x+1})$ ……4分

所以 $L(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+40x-200, & 0<x<50,\\ 1000-(2x+\frac{7200}{x+1}), & x\geq50\end{cases}$ ……………………………………5分

(2)当 $0<x<50$ 时，$L(x)=-\frac{1}{2}x^2+40x-200=-\frac{1}{2}(x-40)^2+600\leq600$ ……7分

当 $x\geq50$ 时，$L(x)=1000-(2x+\frac{7200}{x+1})=1000-2[(x+1)+\frac{3600}{x+1}]+2$ ………9分

$\leq1002-4\sqrt{(x+1)\cdot\frac{3600}{x+1}}=762$，当且仅当 $(x+1)=\frac{3600}{x+1}$，即 $x=59$ 时，取等号

……………………………………………………………………11分

因为 $600<762$，所以年产量为 59 千件时，所获利润最大 ……………………………12分

21. 解:(1)由 $S_n-a_{n+1}=-1$ ① 当 $n\geqslant 2$ 时,$S_{n-1}-a_n=-1$ ②,

①−②得,$a_{n+1}=2a_n(n\geqslant 2)$ ······ 2分

当 $n=1$ 时,$S_1-a_2=-1$,解得 $a_2=2$,此时 $a_2=2a_1$ 适合 ······ 3分

所以$\{a_n\}$是首项为1,公比为2的等比数列,所以 $a_n=2^{n-1}$ ······ 4分

(2)当 n 奇数时,$c_n=\dfrac{2}{n(n+2)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}$, ······ 5分

对任意的正整数 n,有 $\sum\limits_{k=1}^{n}c_{2k-1}=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right)$

$$=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}$$ ······ 7分

当 n 为偶数时,$c_n=\dfrac{n-1}{2^n}$, ······ 8分

$$\sum_{k=1}^{n}c_{2k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{4^k}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4^2}+\frac{5}{4^3}+\cdots+\frac{2n-3}{4^{n-1}}+\frac{2n-1}{4^n}\quad ①$$

由①得 $\dfrac{1}{4}\sum\limits_{k=1}^{n}c_{2k}=\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{3}{4^3}+\dfrac{5}{4^4}+\cdots+\dfrac{2n-3}{4^n}+\dfrac{2n-1}{4^{n+1}}$ ②

由①−②得 $\dfrac{3}{4}\sum\limits_{k=1}^{n}c_{2k}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{4^2}+\cdots+\dfrac{2}{4^n}-\dfrac{2n-1}{4^{n+1}}=\dfrac{\frac{2}{4}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{1-\frac{1}{4}}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{2n-1}{4^{n+1}}$,

······ 10分

由于 $\dfrac{\frac{2}{4}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{1-\frac{1}{4}}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{2n-1}{4^{n+1}}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{4^n}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{2n-1}{4^n}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{12}-\dfrac{6n+5}{3\times 4^{n+1}}$,

得:$\sum\limits_{k=1}^{n}c_{2k}=\dfrac{5}{9}-\dfrac{6n+5}{9\times 4^n}$. ······ 11分

因此,$\sum\limits_{k=1}^{2n}c_k=\sum\limits_{k=1}^{n}c_{2k-1}+\sum\limits_{k=1}^{n}c_{2k}=\dfrac{2n}{2n+1}-\dfrac{6n+5}{9\times 4^n}+\dfrac{5}{9}$. ······ 12分

22. 解:(1)由 $f'(x)=(x+1)e^x+2a(x+1)=(x+1)(e^x+2a)$ ······ 1分

令 $f'(x)=0$,解得 $x=-1$,$x=\ln(-2a)$ ······ 2分

①当 $-\dfrac{1}{2e}<a<0$,

由 $f'(x)>0$,解得 $x<\ln(-2a)$ 或 $x>-1$,由 $f'(x)<0$,解得 $\ln(-2a)<x<-1$,

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln(-2a))$,$(-1,+\infty)$ 单调递增,在 $(\ln(-2a),-1)$ 单调递减

······ 3分

②当 $a=-\dfrac{1}{2e}$,$f'(x)\geqslant 0$,$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增 ······ 4分

③当 $a<-\frac{1}{2e}$，由 $f'(x)>0$，解得 $x<-1$ 或 $x>\ln(-2a)$．

由 $f'(x)<0$，解得 $-1<x<\ln(-2a)$．

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$，$(\ln(-2a),+\infty)$ 单调递增，在 $(-1,\ln(-2a))$ 单调递减 ……5 分

综上，当 $-\frac{1}{2e}<a<0$ 时，

$f(x)$ 在 $(-\infty,\ln(-2a))$，$(-1,+\infty)$ 单调递增，在 $(\ln(-2a),-1)$ 单调递减；

当 $a=-\frac{1}{2e}$ 时，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

当 $a<-\frac{1}{2e}$ 时，

$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$，$(\ln(-2a),+\infty)$ 单调递增，在 $(-1,\ln(-2a))$ 单调递减. ……… 6 分

(2)证明：对任意 $a\le 1$，当 $x>0$ 时，要证 $f(x)\ge ex^2+a(x^3-x^2+3x+1)$，即证

$\frac{e^x}{x}+2a-\frac{a}{x}-ax-e\ge 0$ ………………………………………………………… 7 分

令 $g(x)=\frac{e^x}{x}+2a-\frac{a}{x}-ax-e$，则

$g'(x)=\frac{(x-1)(e^x-ax-a)}{x^2}$，令 $h(x)=e^x-ax-a$，

则 $h'(x)=e^x-a$，因为 $x>0$，$a\le 1$，所以 $h'(x)=e^x-a>0$．

所以 $h(x)>h(0)=1-a\ge 0$ ………………………………………………………… 9 分

所以 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

$x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增 ………………………………………… 10 分

所以 $g(x)\ge g(1)=0$，即 $\frac{e^x}{x}+2a-\frac{a}{x}-ax-e\ge 0$，所以原不等式成立 ……………… 12 分