参考答案及解析

一、选择题

1.D　2.C　3.B　4.C　5.A　6.A　7.B　8.A

二、选择题

9.ABC　10.BD　11.AD　12.AD

三、填空题

13.1

14.$-\frac{1}{2}$

15.4

16.$\frac{\sqrt{7}}{4}$　$\frac{23}{4}$

四、解答题

17.**解**:(1)依题意可知$\angle POA=\frac{\pi}{3}x$,$\angle QOA=\frac{\pi}{6}x$.

因为$|OP|=|OQ|=1$,

所以$|OM|=|OQ|\cdot\cos\angle MOQ=\cos\angle MOQ$,

所以$\angle MOQ=\dfrac{\frac{\pi}{3}x-\frac{\pi}{6}x}{2}=\frac{\pi}{12}x$,　(3分)

所以$f(x)=|OM|\cos\frac{\pi}{12}x(0\leqslant x\leqslant 6)$.　(4分)

即$f(x)=\cos\frac{\pi}{12}x(0\leqslant x\leqslant 6)$.　(5分)

(2)依题意可知$g(x)=\cos\left[\frac{\pi}{12}(x-2)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{12}x-\frac{\pi}{6}\right)(2\leqslant x\leqslant 8)$,　(7分)

由$2k\pi\leqslant\frac{\pi}{12}x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\pi$,得$24k+2\leqslant x\leqslant 24k+14$,

故函数$y=g(x)$在$[2,8]$上的单调递减区间为$[2,8]$.　(10分)

18.(1)**证明**:如图,连接AC,交BD于点O,连接PO,

由$AD=AB,CD=BC,AC=AC$,

可得$\triangle ABC\cong\triangle ADC$,所以$\angle BAC=\angle DAC$.

又$AO=AO$,所以$\triangle AOB\cong\triangle AOD$,

所以$BO=OD$,即O为BD的中点,

在等腰三角形PBD中,可得$BD\perp OP$,

在等腰三角形BCD中,$BD\perp OC$,

又$OP\cap OC=O$,$OP,OC\subset$平面POC,所以$BD\perp$平面POC,

又$PC\subset$平面POC,所以$BD\perp PC$.　(6分)

(2)**解**:由(1)可得$AC\perp BD$,

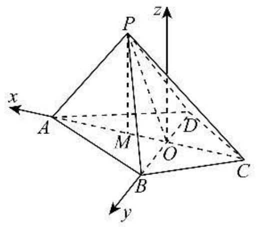
又$CD=\sqrt{7}$,$OD=\frac{1}{2}BD=\sqrt{3}$,

所以$CO=\sqrt{CD^2-OD^2}$,$AO=\sqrt{3}OD=3$,　(8分)

由于P-ABD为正三棱锥,点P在底面ABD的射影M一定在AO上.

根据正三棱锥的性质可得$AM=\frac{2}{3}AO=2$,$PM=\sqrt{AP^2-AM^2}=\sqrt{3}$.

以O为坐标原点,过点O作PM的平行线,以PM的平行线所在直线为z轴,以OA,OB所在直线为x轴,y轴建立如图所示的空间直角坐标系.



可得$A(3,0,0)$,$C(-2,0,0)$,$D(0,-\sqrt{3},0)$,$P(1,0,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{PC}=(-3,0,-\sqrt{3})$,$\overrightarrow{DC}=(-2,\sqrt{3},0)$,　(9分)

又$\overrightarrow{AC}=(-5,0,0)$(或$\overrightarrow{AD}=(-3,-\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{AP}=(-2,0,\sqrt{3})$).

设平面PCD的法向量$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

可得$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-3x-\sqrt{3}z=0,\\-2x+\sqrt{3}y=0,\end{cases}$即$\begin{cases}\sqrt{3}x+z=0,\\2x-\sqrt{3}y=0,\end{cases}$

不妨令$x=\sqrt{3}$,可得$\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},2,-3)$,

所以$d=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$,

故点A到平面PCD的距离为$\frac{5\sqrt{3}}{4}$.　(12分)

19.**解**:(1)设$\{b_n\}$的公比为q,

因为$a_4=b_2,a_8=b_3$,所以$1+3d=2q,1+7d=2q^2$,

联立消q得$9d^2-8d-1=0$,　(2分)

解得$d=1$或$d=-\frac{1}{9}$与$d>0$矛盾,

故$d=1$,代回计算得$q=2$,　(4分)

所以$a_n=a_1+(n-1)d=n,b_n=b_1\cdot q^{n-1}=2^n$.　(6分)

(2)若选①,$\log_4 b_m=a_k$,则有$\log_4 2^m=k\Rightarrow m=2k$,$k\in\mathbf{N}^*$,　(8分)

所以$\{b_n\}$剩余的项就是原数列的奇数项,相当于剩余的项$\{c_n\}$以2为首项,4为公比的等比数列,

所以$S_{20}=\dfrac{2\times(1-4^{20})}{1-4}=\frac{2}{3}(4^{20}-1)$.　(12分)

若选②，$b_m=3a_k+1$，则有 $2^m=3k+1$，

因为 $m\in\mathbf{N}^*$，$k\in\mathbf{N}^*$，

所以当 $m=2n(n\in\mathbf{N}^*)$ 时，对应的 $k=\frac{4^n-1}{3}=\frac{(3+1)^n-1}{3}$ 为整数，满足；　　(8分)

当 $m=2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$ 时，对应的 $k=\frac{\frac{4^n}{2}-1}{3}=\frac{(3+1)^n-2}{6}$ 不为整数，不满足，　　(10分)

所以 $\{b_n\}$ 剩余的项就是原数列的奇数项，相当于剩余的项 $\{c_n\}$ 以 2 为首项，4 为公比的等比数列，所以 $S_{20}=\frac{2\times(1-4^{20})}{1-4}=\frac{2}{3}(4^{20}-1)$.　　(12分)

20.(1)解：设 $E(x_0,y_0)$，过 (x_0,y_0) 且平行 l_2 的直线方程为 $y-y_0=-2(x-x_0)$，

由 $\begin{cases}y-y_0=-2(x-x_0),\\y=2x,\end{cases}$ 得交点 A 的横坐标为 $\frac{2x_0+y_0}{4}$，

所以 $|OA|=\sqrt{1+2^2}\left|\frac{2x_0+y_0}{4}\right|=\frac{\sqrt{5}}{4}|2x_0+y_0|$，点 E 到直线 l_1 的距离为 $\frac{|2x_0-y_0|}{\sqrt{5}}$，

所以四边形 $OAEB$ 的面积为 $\frac{|2x_0-y_0|}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{4}|2x_0+y_0|=4$，即 $\frac{x_0^2}{4}-\frac{y_0^2}{16}=1$ 或 $\frac{y_0^2}{16}-\frac{x_0^2}{4}=1$，

故动点 E 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$ 或 $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{4}=1$.　　(5分)

(2)证明：由题知 E_0 的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$. 设 $N(0,y_N)$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，当直线 m 的斜率为 0 时，$N(0,0)$，

若 $P(-2,0)$，$Q(2,0)$，由 $\overrightarrow{NM}=\lambda\overrightarrow{MP}$，$\overrightarrow{NM}=\mu\overrightarrow{MQ}$，

知 $\lambda=-\frac{1}{3}$，$\mu=1$，所以 $\lambda+\mu=\frac{2}{3}$；　　(6分)

若 $Q(-2,0)$，$P(2,0)$，由 $\overrightarrow{NM}=\lambda\overrightarrow{MP}$，$\overrightarrow{NM}=\mu\overrightarrow{MQ}$，

知 $\lambda=1$，$\mu=-\frac{1}{3}$，所以 $\lambda+\mu=\frac{2}{3}$；

当直线 m 的斜率不为 0 时，设直线 m 的方程为 $x=ty+1$(显然 $t\neq0$)，

则 $N\left(0,-\frac{1}{t}\right)$，即 $y_N=-\frac{1}{t}$，

因为 $\overrightarrow{NM}=\lambda\overrightarrow{MP}$，$\overrightarrow{NM}=\mu\overrightarrow{MQ}$，

所以 $(1,-y_N)=\lambda(x_1-1,y_1)$，$(1,-y_N)=\mu(x_2-1,y_2)$，

解得 $\lambda=-\frac{y_N}{y_1}$，$\mu=-\frac{y_N}{y_2}$，$\lambda+\mu=-y_N\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}\right)=-y_N\cdot\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}$.　　(9分)

由 $\begin{cases}x=ty+1,\\4x^2-y^2=16,\end{cases}$ 消 x 并整理得 $(4t^2-1)y^2+8ty-12=0$，

因为直线 m 与曲线 E_0 有两个交点，则在 $4t^2-1\neq0$ 且判别式 $\Delta>0$ 时，有 $y_1+y_2=\frac{-8t}{4t^2-1}$ 且 $y_1y_2=\frac{-12}{4t^2-1}$，

所以 $\lambda+\mu=\frac{1}{t}\cdot\frac{-8t}{4t^2-1}\cdot\frac{4t^2-1}{-12}=\frac{2}{3}$，即证得 $\lambda+\mu$ 为定值 $\frac{2}{3}$.　　(12分)

21.解：(1)第 1 位居民接种 A,B,C,D 疫苗的概率分别为 $0,\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}$；

第 2 位居民接种 A 疫苗的概率 $P(A)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

第 2 位居民接种 B 疫苗的概率 $P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$.

同理，第 2 位居民接种 C,D 疫苗的概率也等于 $\frac{2}{9}$.

故第 2 位居民接种 A 疫苗的概率最大.　　(6分)

(2)因为 $P_{n+1}(A)=\frac{1}{3}(1-P_n(A))$，

所以 $P_{n+1}(A)-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left(P_n(A)-\frac{1}{4}\right)$，

故数列 $\left\{P_n(A)-\frac{1}{4}\right\}$ 是公比为 $-\frac{1}{3}$ 的等比数列.　　(8分)

又 $P_1(A)-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$，所以 $P_n(A)-\frac{1}{4}=\left(-\frac{1}{4}\right)\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$，

即 $P_n(A)=\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$，

从而 $P_{10}(A)=\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^9$，

同理 $P_{10}(B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{3}\right)^9$，

$P_{10}(C)=P_{10}(D)=P_{10}(B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{3}\right)^9$，

所以 $P_{10}(A)-P_{10}(B)=\left[\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^9\right]-$

$\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{3}\right)^{9}\right]=\left(-\frac{1}{3}\right)^{10}\approx 1.7\times 10^{-5}$,

第 10 位居民接种 A,B,C,D 疫苗概率应该相差无几.

第 $n(n>10)$ 位居民接种 A,B,C,D 疫苗概率应该相差将会更小,所以张医生的话合理. (12 分)

22. **解**:(1)由题意,当 $a=1$ 时,设 $h(x)=f(x)-g(x)$,

则 $h(x)=x^2-x+1-\ln x-1=x^2-x-\ln x(x>0)$,

$h'(x)=2x-1-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-x-1}{x}=\frac{(2x+1)(x-1)}{x}$. (2 分)

令 $h'(x)=0$,得 $x=1$ (负值舍去),

$h(x)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增,

所以 $h(x)_{\min}=h(1)=0$,

根据题意 t 的取值范围为$(0,1]$. (4 分)

(2)设 $f(x)$在点$(x_1,f(x_1))$处与函数 $g(x)$在点$(x_2,g(x_2))$处有相同的切线,

则 $f'(x_1)=g'(x_2)=\frac{f(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}$,

所以 $2x_1-a=\frac{1}{x_2}=\frac{x_1^2-ax_1+1-\ln x_2-a}{x_1-x_2}$,

所以 $x_1=\frac{1}{2x_2}+\frac{a}{2}$,代入$\frac{x_1-x_2}{x_2}=x_1^2-ax_1+1-\ln x_2-a$,得$\frac{1}{4x_2^2}+\frac{a}{2x_2}+\ln x_2+\frac{a^2}{4}+a-2=0$. (6 分)

所以问题转化为关于 x 的方程$\frac{1}{4x^2}+\frac{a}{2x}+\ln x+\frac{a^2}{4}+a-2=0$ 有解.

设 $F(x)=\frac{1}{4x^2}+\frac{a}{2x}+\ln x+\frac{a^2}{4}+a-2(x>0)$,则函数 $F(x)$有零点, (7 分)

因为 $F(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+a\right)^2+\ln x+a-2$,

当 $x=e^{2-a}$时,$\ln x+a-2=0$,所以 $F(e^{2-a})>0$.

所以问题转化为 $F(x)$的最小值小于或等于 0.

$F'(x)=-\frac{1}{2x^3}-\frac{a}{2x^2}+\frac{1}{x}=\frac{2x^2-ax-1}{2x^3}$,

设 $2x_0^2-ax_0-1=0(x_0>0)$,则当 $0<x<x_0$ 时,$F'(x)<0$;当 $x>x_0$ 时,$F'(x)>0$.

所以 $F(x)$在$(0,x_0)$上单调递减,在$(x_0,+\infty)$上单调递增,

所以 $F(x)$的最小值为 $F(x_0)=\frac{1}{4x_0^2}+\frac{a}{2x_0}+\ln x_0+\frac{a^2}{4}+a-2$. (10 分)

由 $2x_0^2-ax_0-1=0$ 知 $a=2x_0-\frac{1}{x_0}$,

故 $F(x_0)=x_0^2+2x_0-\frac{1}{x_0}+\ln x_0-2$.

设 $\varphi(x)=x^2+2x-\frac{1}{x}+\ln x-2(x>0)$,

则 $\varphi'(x)=2x+2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}>0$,

故 $\varphi(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

因为 $\varphi(1)=0$,所以当 $x\in(0,1]$时,$\varphi(x)\leqslant 0$,

所以 $F(x)$的最小值 $F(x_0)\leqslant 0$ 等价于 $0<x_0\leqslant 1$.

又函数 $y=2x-\frac{1}{x}$在$(0,1]$上单调递增,

所以 $a=2x_0-\frac{1}{x_0}\in(-\infty,1]$. (12 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。