2023年天津市十二区重点学校高三毕业班联考（一）

数学参考答案

一、选择题：每小题5分，满分45分

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
答案	C	A	C	D	B	A	B	D	D

二、填空题：每小题5分，共30分.（两空中对一个得3分，对两个得5分）

10. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　11. -270　12. $(x-1)^2+y^2=4$　13. 2；$\frac{9}{7}$　14. $\frac{5}{2}$　15. $-4<a<-\frac{8}{3}$ 或 $a=-8$

三、解答题：本大题5小题，共75分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

16.（1）解：因为 $2\sin C=\sin A+\cos A\tan B$，

所以 $2\sin C=\sin A+\cos A\times\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos B}=\frac{\sin(B+A)}{\cos B}=\frac{\sin C}{\cos B}$ …………2分

所以 $2\sin C\cos B=\sin C$，

因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $\sin C>0$，所以 $\cos B=\frac{1}{2}$ …………4分

又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$； …………5分

（2）在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理及 $a=2$，$c=3$，$B=\frac{\pi}{3}$，

有 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=7$，故 $b=\sqrt{7}$. …………8分

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，可得 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.因为 $a<c$，故 $\cos A=\frac{2}{\sqrt{7}}$. …………10分

因此 $\sin 2A=2\sin A\cos A=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，$\cos 2A=2\cos^2A-1=\frac{1}{7}$. …………12分

所以，$\sin(2A-B)=\sin 2A\cos B-\cos 2A\sin B=\frac{4\sqrt{3}}{7}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$. …………14分

17.（本小题满分15分）

（1）方法一：分别取 AB，CD 的中点 G，H，连接 EG，GH，FH， …………1分

由题意可知：点 E、F 分别为线段 PB、CQ 的中点.

所以 $EG\parallel PA$，$FH\parallel QD$，因为 $PA\parallel DQ$，所以 $EG\parallel FH$，

所以点 E，G，H，F 四点共面，因为 G，H 分别为 AB，CD 的中点，

所以 $GH\parallel AD$，$AD\subset$ 平面 $ADQP$，$GH\not\subset$ 平面 $ADQP$，

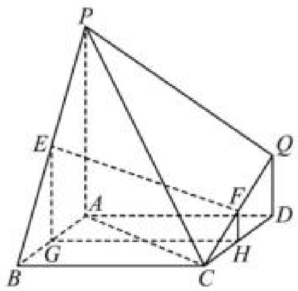
所以GH // 平面$ADQP$，…………3 分

又因为FH // QD，$QD \subset$平面$ADQP$，

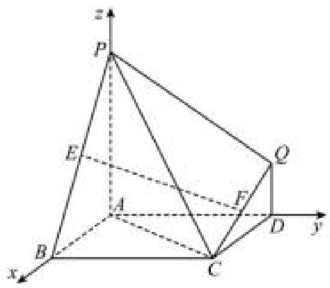
$FH \not\subset$平面$ADQP$，所以FH // 平面$ADQP$，…………4 分

又因为$FH \cap GH = H$，FH，$GH \subset$平面$EGHF$，所以平面$EGHF$ // 平面$ADQP$，

因为$EF \subset$平面$EGHF$，所以EF //平面$ADQP$.…………5 分



方法二：因为$ABCD$为正方形，且$PA \perp$平面$ABCD$，所以AP，AB，AD两两互相垂直，建立如图所示空间直角坐标系，…………1 分



则$P(0,0,3)$，$C(3,3,0)$，$Q(0,3,1)$，$B(3,0,0)$，$E\left(\frac{3}{2},0,\frac{3}{2}\right)$，$F\left(\frac{3}{2},3,\frac{1}{2}\right)$…………3 分

（建系和对一个点的坐标就给 1 分，全对给 2 分，没有出现点的坐标扣 1 分）

所以$\overrightarrow{EF}=(0,3,-1)$，$\overrightarrow{PC}=(3,3,-3)$，$\overrightarrow{CQ}=(-3,0,1)$，

易知平面$PADQ$的一个法向量$\vec{a}=(1,0,0)$，

所以$\vec{a}\cdot\overrightarrow{EF}=0$，所以$\overrightarrow{EF}\perp\vec{a}$，………………..4 分

又因为$EF \not\subset$平面$ADQP$，所以EF //平面$ADQP$.…………5 分

（2）设平面PCQ的法向量$\overrightarrow{m}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{m}=0\\ \overrightarrow{CQ}\cdot\overrightarrow{m}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}3x+3y-3z=0\\ -3x+z=0\end{cases}$，令$x=1$，则$z=3$，$y=2$，

所以平面 PCQ 的一个法向量为 $\overrightarrow{m}=(1,2,3)$，…………6 分

易知平面 CQD 的一个法向量 $\vec{n}=(0,1,0)$，设平面 PCQ 与平面 CQD 夹角为 θ,

则 $\cos\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{m},\vec{n}\rangle\right|=\dfrac{2}{1\times\sqrt{1+4+9}}=\dfrac{2}{\sqrt{14}}=\dfrac{\sqrt{14}}{7}$，

所以平面 PCQ 与平面 CQD 夹角余弦值为 $\dfrac{\sqrt{14}}{7}$ …………8 分

（设角和作答具备其一即可，均不写扣 1 分）

（3）假设存在点 M，$\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PC}$，$\lambda\in[0,1]$，

设 $M(x,y,z)$，所以 $(x,y,z-3)=\lambda(3,3,-3)$，…………9 分

所以 $M(3\lambda,3\lambda,3-3\lambda)$ 所以 $\overrightarrow{AM}=(3\lambda,3\lambda,3-3\lambda)$ …………10 分

由（2）得平面 PCQ 的一个法向量为 $\overrightarrow{m}=(1,2,3)$，

$\therefore\dfrac{\sqrt{42}}{7}=\dfrac{|3\lambda+6\lambda+9-9\lambda|}{\sqrt{14}\sqrt{9\lambda^2+9\lambda^2+(3-3\lambda)^2}}$，…………12 分

得 $12\lambda^2-8\lambda+1=0$.即 $(2\lambda-1)(6\lambda-1)=0$，…………13 分

$\therefore\lambda=\dfrac{1}{2}$ 或 $\lambda=\dfrac{1}{6}$，…………14 分

$\therefore\dfrac{PM}{MC}=1$ 或 $\dfrac{PM}{MC}=\dfrac{1}{5}$.…………15 分

18.（本小题满分 15 分）

（1）由直角三角形面积关系得 $bc=\dfrac{1}{4}\times2b\times\sqrt{b^2+c^2}$，即 $bc=\dfrac{1}{4}\times2b\times a$

解得 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$ …………3 分

（2）由（1）得 $a=2c$，$b=\sqrt{3}c$，易得 $A(0,\sqrt{3}c)$，$B(0,-\sqrt{3}c)$，直线 l 的方程为

$y=kx-\sqrt{3}c$，因为直线 l 不过右顶点 $(2c,0)$，所以 $k\neq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，…………4 分

$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4c^2}+\dfrac{y^2}{3c^2}=1\\ y=kx-\sqrt{3}c\end{cases}$，得 $(3+4k^2)x^2-8\sqrt{3}kcx=0$，$\therefore x_N=\dfrac{8\sqrt{3}kc}{3+4k^2}$ …………6 分

从而 $N\left(\dfrac{8\sqrt{3}kc}{3+4k^2},\dfrac{4\sqrt{3}k^2c-3\sqrt{3}c}{3+4k^2}\right)$，$P\left(\dfrac{\sqrt{3}c}{k},0\right)$ …………8 分

直线 AN 的斜率为 $\dfrac{\dfrac{4\sqrt{3}k^2c-3\sqrt{3}c}{3+4k^2}-\sqrt{3}c}{\dfrac{8\sqrt{3}kc}{3+4k^2}}=\dfrac{-6\sqrt{3}c}{8\sqrt{3}kc}=-\dfrac{3}{4k}$ …………9 分

故直线 AN 的方程为 $y=-\dfrac{3}{4k}x+\sqrt{3}c$ …………10 分

令 $x=2c$，得 $Q\left(2c,-\dfrac{3c}{2k}+\sqrt{3}c\right)$，…………11 分

直线 PQ 的斜率 $k_{PQ}=\dfrac{-\dfrac{3c}{2k}+\sqrt{3}c}{2c-\dfrac{\sqrt{3}c}{k}}=\dfrac{-3c+2\sqrt{3}kc}{4kc-2\sqrt{3}c}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ …………12 分

$A\left(0,\sqrt{3}c\right)$，左顶点 $D\left(-2c,0\right)$，$k_{AD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，即 $\left|AD\right|^2=a^2+b^2=14$，$\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$

解得 $a^2=8$，$b^2=6$，$c^2=2$.…………14 分

$\therefore$ 椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{6}=1$ …………15 分

19.（本小题满分 15 分）

【详解】（1）因 $a_{n+1}-a_n=2$，$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是公差为 $d=2$ 等差数列，且 $S_8=64$，

$\therefore 8a_1+\dfrac{8\times 7}{2}\times 2=64$，解得 $a_1=1$，$\therefore a_n=1+2\left(n-1\right)=2n-1$；…………2 分

设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q（$q>0$），

因为 $b_1=3$，$b_3-b_2=18$，$\therefore 3q^2-3q=18$，即 $q^2-q-6=0$，

解得 $q=-2$（舍去）或 $q=3$，$\therefore b_n=3\times 3^{n-1}=3^n$ …………4 分

（2）由（1）得 $c_n=\dfrac{a_{n+2}-1}{a_na_{n+1}b_n}=\dfrac{2\left(n+2\right)-2}{\left(2n-1\right)\left(2n+1\right)\cdot 3^n}$ …………5 分

$=\dfrac{2n+2}{\left(2n-1\right)\left(2n+1\right)\cdot 3^n}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{\left(2n-1\right)3^{n-1}}-\dfrac{1}{\left(2n+1\right)3^n}\right]$ …………6 分

$=\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{1}{1\times 3^0}-\dfrac{1}{3\times 3^1}\right)+\left(\dfrac{1}{3\times 3^1}-\dfrac{1}{5\times 3^2}\right)+\left(\dfrac{1}{5\times 3^2}-\dfrac{1}{7\times 3^3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{\left(2n-1\right)\cdot 3^n}-\dfrac{1}{\left(2n+1\right)\cdot 3^n}\right)\right]$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1\times 3^0}-\dfrac{1}{\left(2n+1\right)\cdot 3^n}\right)$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\left(2n+1\right)\cdot 3^{n}},$$ …………8 分

（3）$\because d_n=\begin{cases}\dfrac{a_{\frac{n}{2}}+1}{b_{\frac{n}{2}}},n\text{为偶数}\\(-1)^{\frac{n+1}{2}}\cdot a_n,n\text{为奇数}\end{cases}$

$\therefore S_{2n}=\left(d_2+d_4+d_6+\cdots+d_{2n}\right)+\left(d_1+d_3+d_5+\cdots+d_{2n-1}\right)$…………9 分

$$=\left[\frac{a_1+1}{b_1}+\frac{a_2+1}{b_2}+\frac{a_3+1}{b_3}+\cdots+\frac{a_n+1}{b_n}\right]+\left[-a_1+a_3-a_5+\cdots+\left(-1\right)^{n}\cdot a_{2n-1}\right]$$

$$=\left[\frac{2}{3^1}+\frac{4}{3^2}+\frac{6}{3^3}+\cdots+\frac{2n}{3^n}\right]+\left[-1+5-9+13\cdots+\left(-1\right)^{n}\cdot\left(4n-3\right)\right]$$ …………10 分

$=P_n+Q_n$

$\because P_n=\frac{2}{3^1}+\frac{4}{3^2}+\frac{6}{3^3}+\cdots+\frac{2n}{3^n}$（1）

$\therefore \frac{1}{3}P_n=\frac{2}{3^2}+\frac{4}{3^3}+\frac{6}{3^4}+\cdots+\frac{2n-2}{3^n}+\frac{2n}{3^{n+1}}$（2）

（1）－（2）：$\frac{2}{3}P_n=\frac{2}{3^1}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{2}{3^4}+\cdots+\frac{2}{3^n}-\frac{2n}{3^{n+1}}$

$$=\frac{\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}-\frac{2n}{3^{n+1}}=1-\frac{1}{3^n}-\frac{2n}{3^{n+1}}=1-\frac{2n+3}{3^{n+1}}$$

$\therefore P_n=\frac{3}{2}\left(1-\frac{2n+3}{3^{n+1}}\right)=\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{2\cdot 3^n}$…………12 分

方法二：$d_n=\begin{cases}\dfrac{a_{\frac{n}{2}}+1}{b_{\frac{n}{2}}},n\text{为偶数}\\(-1)^{\frac{n+1}{2}}\cdot a_n,n\text{为奇数}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{a_k+1}{b_k},n=2k\\(-1)^k\cdot a_{2k-1},n=2k-1\end{cases}$

$$=\begin{cases}\dfrac{2k}{3^k},n=2k\\(-1)^k\cdot\left(4k-3\right),n=2k-1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2k+1}{3^{k-1}}-\dfrac{2k+3}{3^k}\right),n=2k\\(-1)^k\cdot\left(4k-3\right),n=2k-1\end{cases}$$

$\therefore P_n=\left(d_2+d_4+d_6+\cdots+d_{2n}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{3}{3^0}-\frac{5}{3^1}\right)+\left(\frac{5}{3^1}-\frac{7}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{2n+1}{3^{n-1}}-\frac{2n+3}{3^n}\right)\right]=\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{2\cdot 3^n}$

①当n为偶数时，$Q_n=\left[-1+5-9+13\cdots+(-1)^n\cdot a_{2n-1}\right]$

$=(-1+5)+(-9+13)+\cdots+\left[-(4n-7)+(4n-3)\right]=4+4+\cdots+4=4*\frac{n}{2}=2n$，…………13 分

②当n为奇数时，$Q_n=4+4+\cdots+4-(4n-3)=4*\frac{n-1}{2}-(4n-3)=-2n+1$…………14 分

$\therefore Q_n=\begin{cases}-2n+1, n\text{为奇数}\\ 2n, n\text{为偶数}\end{cases}$

$\therefore S_{2n}=P_n+Q_n=\begin{cases}\frac{3}{2}\left(1-\frac{2n+3}{3^{n+1}}\right)-2n+1, n\text{为奇数}\\ \frac{3}{2}\left(1-\frac{2n+3}{3^{n+1}}\right)+2n, n\text{为偶数}\end{cases}$ …………15 分

20.（本小题满分 16 分）

解：（1）$f(x)=2e^x-\sin x-2$，求导$f'(x)=2e^x-\cos x$，

切线的斜率$k=f'(0)=2-1=1$，又$f(0)=0$，所以切点为$(0,0)$，

所以，切线方程为$y=x$…………4 分

（2）（ⅰ）求导$f'(x)=ae^x-\cos x$，

①当$a\geq 1$时，当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$ae^x>1$，$\cos x\in(0,1)$，$\therefore f'(x)>0$，则$y=f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，

没有极值点，不合题意，舍去；…………6 分

②当$0<a<1$时，求二阶导$f''(x)=ae^x+\sin x>0$，所以$f'(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上递增，

又$f'(0)=a-1<0$，$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=ae^{\frac{\pi}{2}}>0$，所以$f'(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上有唯一零点$x_1$，…………8 分

当$x\in(0,x_1)$时，$f'(x)<0$，函数$f(x)$单调递减；

当$x\in\left(x_1,\frac{\pi}{2}\right)$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$单调递增，

所以函数$y=f(x)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内有唯一极值点，符合题意，

综上，a的取值范围是$(0,1)$.…………9 分

（ii）由（i）知$0<a<1$，当$x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$时，$f'(x)=ae^x-\cos x>0$，…………10 分

当$x\in(0,x_1)$时，$f'(x)<0$，函数$f(x)$单调递减；

当$x\in(x_1,\pi)$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$单调递增；

所以$x\in(0,x_1)$时，$f(x)<f(0)=0$，则$f(x_1)<0$，

又因为$f(\pi)=ae^{\pi}-a=a(e^{\pi}-1)>0$，所以$f(x)$在$(x_1,\pi)$上有唯一零点$x_0$，

即$f(x)$在$(0,\pi)$上有唯一零点x_0.…………12 分

因为$f(2x_1)=ae^{2x_1}-\sin 2x_1-a$，

由（i）知$f'(x_1)=0$，所以$ae^{x_1}=\cos x_1$，

则$f(2x_1)=ae^{2x_1}-\sin 2x_1-a=e^{x_1}\cos x_1-2\sin x_1\cos x_1-\frac{\cos x_1}{e^{x_1}}$

$=\cos x_1\left(e^{x_1}-2\sin x_1-\frac{1}{e^{x_1}}\right)$，$x_1\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$…………13 分

设$h(x)=e^x-2\sin x-e^{-x}$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

则$h'(x)=e^x-2\cos x+e^{-x}$，

$\because e^x+e^{-x}>2$，$2\cos x<2$，所以$h'(x)=e^x+e^{-x}-2\cos x>0$

$h(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$为单调递增，又$h(0)=0$，所以$h(x)>0$，

又$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$\cos x_1>0$，所以$f(2x_1)=\cos x_1\left(e^{x_1}-2\sin x_1-\frac{1}{e^{x_1}}\right)>0$.

所以$f(2x_1)>f(x_0)=0$.

由前面讨论知$x_1<2x_1<\pi$，$x_1<x_0<\pi$，$f(x)$在(x_1,π)单调递增，

所以$x_0<2x_1$.…………16 分