

银川一中 2023 届高三第四次月考数学(文科) (参考答案)

一、选择

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| 答案 | D | A | A | B | C | B | D | A | B | B  | C  | D  |

二、填空

13.8; 14.  $\frac{\pi}{3}/60^\circ$ ; 15.  $-\frac{5}{2}$ ; 16.  $2 \leq \omega < \frac{7}{3}$

三、解答

17. 解: (I) 在  $\triangle ABD$  中, 因为  $\cos \angle ADB = \frac{1}{7}$ ,  $\angle ADB \in (0, \pi)$ ,

18. 所以  $\sin \angle ADB = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ . .....2 分

19. 根据正弦定理, 有  $\frac{BD}{\sin \angle A} = \frac{AB}{\sin \angle ADB}$ , .....4 分

20. 代入  $AB = 8$ ,  $\angle A = \frac{\pi}{3}$ ,

21. 解得  $BD = 7$ . .....6 分

22. (II) 在  $\triangle BCD$  中, 根据余弦定理  $\cos \angle C = \frac{BC^2 + CD^2 - BD^2}{2BC \cdot CD}$ , .....7 分

23. 代入  $BC = 3$ ,  $CD = 5$ , 得  $\cos \angle C = -\frac{1}{2}$ , .....8 分

$\angle C \in (0, \pi)$  所以  $\angle C = \frac{2\pi}{3}$ , .....10 分

$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$  .....12 分

(公式 1 分, 计算 1 分)

18. 证明: (1) 如图, 连接  $OD$ .....1 分

在直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中, 侧面  $ACC_1A_1$  是平行四边形,

$\therefore O$  为  $AC_1$  的中点,  $D$  是棱  $AB$  的中点,

$\therefore OD // BC_1$ , .....3 分

又  $BC_1 \notin$  平面  $A_1CD$ ,  $OD \subset$  平面  $A_1CD$ ,

$\therefore BC_1 //$  平面  $A_1CD$ ; .....5 分

(2)  $\because$  三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  为直三棱柱,

$\therefore AA_1 \perp$  平面  $ABC$

$\therefore AC \subset$  平面  $ABC$

$\therefore AA_1 \perp AC$

$\therefore AC = AA_1$ ,

$\therefore$  四边形  $ACC_1A_1$  是正方形

$\therefore AC_1 \perp A_1C$ , .....6 分

在直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $AA_1 \perp$  平面  $ABC$ ,

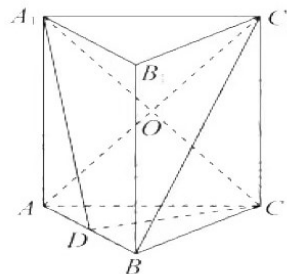
$\therefore AB \subset$  平面  $ABC$ ,  $\therefore AB \perp AA_1$ ,

又  $\because AB \perp AC$ ,  $AC \cap AA_1 = A$ ,  $AC \subset$  平面  $ACC_1A_1$ ,  $AA_1 \subset$  平面  $ACC_1A_1$ ,

$\therefore AB \perp$  平面  $ACC_1A_1$ , .....8 分

$\therefore A_1C \subset$  平面  $ACC_1A_1$ ,

$\therefore AB \perp A_1C$ , .....9 分



高三第四次月考数学(文科)

又  $\because AC_1 \perp A_1C$ ,  $AB \cap AC_1 = A$ ,  $AB \subset \text{平面} ABC_1$ ,  $AC_1 \subset \text{平面} ABC_1$ ,

$\therefore A_1C \perp \text{平面} ABC_1$ , .....11 分

$\because BC_1 \subset \text{平面} ABC_1$ ,

$\therefore BC_1 \perp A_1C$ . .....12 分

19. 解: 因为  $S_{n+1} = S_n + a_n + 1$ ,

所以  $S_{n+1} - S_n = a_n + 1$ , 即  $a_{n+1} = a_n + 1$ ,

所以数列  $\{a_n\}$  是首项为  $a_1$ , 公差为 1 的等差数列. ....2 分

(1) 选①:

由  $a_4 + a_7 = 13$ , 得  $a_1 + 3d + a_1 + 6d = 13$ ,

即  $2a_1 = 13 - 9d$ ,

所以  $2a_1 = 13 - 9 \times 1 = 4$ , 解得  $a_1 = 2$ . ....4 分

所以  $a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + (n-1) \times 1 = n + 1$ ,

即数列  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = n + 1$ . ....6 分

选②:

由  $a_1, a_3, a_7$  成等比数列,

得  $(a_1 + 2d)^2 = a_1(a_1 + 6d)$ ,

则  $a_1^2 + 4a_1d + 4d^2 = a_1^2 + 6a_1d$ ,

所以  $a_1 = 2$ , .....4 分

所以  $a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + (n-1) \times 1 = n + 1$ . ....6 分

选③:

因为  $S_{10} = 10a_1 + \frac{10 \times 9}{2} \times d = 10a_1 + 45d$ ,

所以  $10a_1 + 45 \times 1 = 65$ ,

所以  $a_1 = 2$ , .....4 分

所以  $a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + (n-1) \times 1 = n + 1$ . ....6 分

(2) 由题可知  $b_n = \frac{a_n}{2^n} = \frac{n+1}{2^n}$

(3) 所以  $T_n = \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \cdots + \frac{n+1}{2^n}$ , .....7 分

(4) 所以  $\frac{1}{2}T_n = \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \cdots + \frac{n}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}}$ , .....9 分

(5) 两式相减, 得  $\frac{1}{2}T_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n+1}}$

(6)  $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}) - \frac{n+1}{2^{n+1}}$

(7)  $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} - \frac{n+3}{2^{n+1}}$ , .....11 分

(8) 所以  $T_n = 3 - \frac{n+3}{2^n}$ . ....12 分

20. (1) 方法一: 等体积法

取 AE 中点 G

因为  $AD = DE = 2$ ,

所以  $DG \perp AE$ .

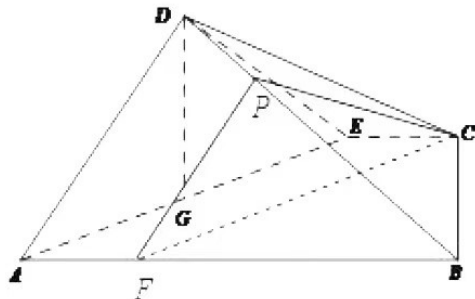
因为平面  $ADE \perp$  平面  $ABCE$ , 平面  $ADE \cap$  平面  $ABCE = AE$ ,

$DG \subset$  平面  $ADE$ ,

所以  $DG \perp$  平面  $ABCE$ . ....2 分

在直角三角形  $ADE$  中,  $\because AD = DE = 2$ ,

$\therefore AE = 2\sqrt{2}$ ,  $\therefore DG = \frac{1}{2}AE = \sqrt{2}$ .



$$V_{D-ABE} = V_{B-ADE} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABE} \cdot DG = \frac{1}{3} S_{\triangle ADE} \cdot d = \frac{5\sqrt{2}}{3} \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$d = \frac{5\sqrt{2}}{2} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

方法二：过点 B 作  $BH \perp AE$ .....2 分

因为平面  $ADE \perp$  平面  $ABCE$ ，平面  $ADE \cap$  平面  $ABCE = AE$ ， $BH \subset$  平面  $ADE$ ，

所以  $BH \perp$  平面  $ADE$ .....4 分

图 1 中， $AD = DE = 2$ ， $AB \parallel DC$   $\angle EAB = 45^\circ$

$$\text{因为 } AB=5, \text{ 所以 } BH = \frac{5\sqrt{2}}{2} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(2) 存在点 P，此时  $\frac{BP}{BD} = \frac{4}{5}$ .....7 分

过点 C 作  $CF \parallel AE$  交 AB 于点 F，过点 F 作  $FP \parallel AD$  交 DB 于点 P，连接 PC，.....8 分（做）

因为  $CF \parallel AE$ ， $AE \subset$  平面  $ADE$ ， $CF \not\subset$  平面  $ADE$ ，所以  $CF \parallel$  平面  $ADE$ 。

同理  $PF \parallel$  平面  $ADE$ ，又因为  $CF \cap PF = F$ ，

所以平面  $PCF \parallel$  平面  $ADE$ 。

因为  $CP \subset$  平面  $PCF$ ，

所以  $CP \parallel$  平面  $ADE$ .....10 分（证）

所以在 BD 上存在点 P，使得  $CP \parallel$  平面  $ADE$ 。

$\because AE \parallel CF$ ， $AF \parallel CE$ ， $\therefore$  四边形  $AECF$  是平行四边形， $\therefore AF = CE = 1$ ，

$\therefore FB = 4$ ，

又  $PF \parallel AD$ ，

$$\therefore \frac{BP}{BD} = \frac{BF}{AB} = \frac{4}{5}.$$

由 (1) 知  $DG \perp$  平面  $ABCE$ ，点 P 到平面  $ABCE$  的距离  $d_2 = \frac{4}{5} DG = \frac{4}{5} \sqrt{2}$

$$V_{P-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot d_2 = \frac{4\sqrt{2}}{3} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

方法二：存在点 P，此时  $\frac{BP}{BD} = \frac{4}{5}$ .....7 分

过点 P 作  $PF \parallel AB$ ，连接 EF、PC.....8 分

$$\text{因为 } AB=5, \frac{BP}{BD} = \frac{4}{5}$$

所以  $PF = EC = 1$ ， $PF \parallel EC$

所以四边形  $EFPC$  为平行四边形，所以  $CP \parallel EF$

因为  $CP \not\subset$  平面  $ADE$ ， $EF \subset$  平面  $ADE$

所以  $CP \parallel$  平面  $ADE$ .....10 分

$$\text{因为 } PF \parallel AB, \therefore \frac{PF}{AB} = \frac{1}{5}, \text{ 所以 } \frac{BP}{BD} = \frac{4}{5}$$

由 (1) 知  $DG \perp$  平面  $ABCE$ ，点 P 到平面  $ABCE$  的距离  $d_2 = \frac{4}{5} DG = \frac{4}{5} \sqrt{2}$

$$V_{P-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot d_2 = \frac{4\sqrt{2}}{3} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21.解：(1) 易知  $f(x)$  不是常值函数，

$\because f(x) = \frac{1}{2}x^2 - a \ln x + 1$  在  $[1, 2]$  上是增函数，

$\therefore f'(x) = x - \frac{a}{x} \geq 0$  在  $[1, 2]$  恒成立.....2 分  
 所以  $a \leq x^2$ , 只需  $a \leq (x^2)_{\min} = 1$ , 故实数  $a$  的取值范围为  $(-\infty, 1]$ ; .....4 分  
 (2) 因为  $-2 \leq a < 0$ , 由 (1) 知, 函数  $f(x)$  在  $[1, 2]$  上单调递增,  
 不妨设  $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq 2$ , 则  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq m \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right|$ ,  
 可化为  $f(x_2) + \frac{m}{x_2} \leq f(x_1) + \frac{m}{x_1}$ , .....6 分  
 设  $h(x) = f(x) + \frac{m}{x} = \frac{1}{2}x^2 - a \ln x + 1 + \frac{m}{x}$ , 则  $h(x_1) \geq h(x_2)$ ,  
 所以  $h(x)$  为  $[1, 2]$  上的减函数, .....8 分  
 即  $h'(x) = x - \frac{a}{x} - \frac{m}{x^2} \leq 0$  在  $[1, 2]$  上恒成立, 等价于  $m \geq x^3 - ax$  在  $[1, 2]$  上恒成立,  
 设  $g(x) = x^3 - ax$ , 所以  $m \geq g(x)_{\max}$ , .....10 分  
 因  $-2 \leq a < 0$ ,  
 所以  $g'(x) = 3x^2 - a > 0$ , 所以函数  $g(x)$  在  $[1, 2]$  上是增函数,  
 所以  $g(x)_{\max} = g(2) = 8 - 2a \leq 12$  (当且仅当  $a = -2$  时等号成立),  
 所以  $m \geq 12$ , 即  $m$  的取值范围为  $[12, +\infty)$ . .....12 分

22. 【答案】(1)  $x - y + 1 = 0$ ,  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ; (2)  $\frac{8\sqrt{2}}{5}$ .

$$(1) \text{ 由 } \begin{cases} x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}),$$

可得  $l$  的普通方程为  $x - y + 1 = 0$ ; .....2 分

由曲线  $C$  的极坐标方程  $\rho^2 + 3\rho^2 \sin^2 \theta = 4$  及  $\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2, \\ \rho \sin \theta = y, \end{cases}$

可得  $x^2 + y^2 + 3y^2 = 4$ ,

整理得  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ , .....5 分

所以曲线  $C$  的直角坐标方程为  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .

(2) 易知点  $M$  在直线  $l$  上,

将  $l$  的参数方程代入  $C$  的直角坐标方程, 得  $\left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2 + 4 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2 = 4$ ,

即  $5t^2 - 2\sqrt{2}t - 6 = 0$ , .....7 分

设  $P, Q$  对应的参数分别为  $t_1, t_2$ , 则  $t_1 + t_2 = \frac{2\sqrt{2}}{5}, t_1 t_2 = -\frac{6}{5}$ , .....9 分

因为  $t_1 t_2 < 0$ ,

所以  $|MP| + |MQ| = |t_1 - t_2| = \sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{6}{5}\right)} = \frac{8\sqrt{2}}{5}$ . .....10 分

23. 解: (1) 因为  $b = c$  且  $a, b, c$  均为正数, 所以  $2a + 2b = 1$ . .....1 分

则  $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(2a + 2b) = 4 + \frac{2b}{a} + \frac{2a}{b} \geq 4 + 2\sqrt{\frac{2b}{a} \times \frac{2a}{b}} = 8$ , .....4 分

则当且仅当  $a = b = \frac{1}{4}$  时等号成立, .....5 分

$$V_{D-ABE}=V_{B-ADE}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABE} \cdot DG=\frac{1}{3}S_{\triangle ADE} \cdot d=\frac{5\sqrt{2}}{3} \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$d=\frac{5\sqrt{2}}{2} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

方法二：过点 B 作  $BH \perp AE$ .....2 分

因为平面  $ADE \perp$  平面  $ABCE$ ，平面  $ADE \cap$  平面  $ABCE = AE$ ， $BH \subset$  平面  $ADE$ ，

所以  $BH \perp$  平面  $ADE$ .....4 分

图 1 中， $AD = DE = 2$ ， $AB \parallel DC$   $\angle EAB = 45^\circ$

$$\text{因为 } AB=5, \text{ 所以 } BH=\frac{5\sqrt{2}}{2} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(2) 存在点 P，此时  $\frac{BP}{BD} = \frac{4}{5}$ .....7 分

过点 C 作  $CF \parallel AE$  交 AB 于点 F，过点 F 作  $FP \parallel AD$  交 DB 于点 P，连接 PC，.....8 分（做）

因为  $CF \parallel AE$ ， $AE \subset$  平面  $ADE$ ， $CF \not\subset$  平面  $ADE$ ，所以  $CF \parallel$  平面  $ADE$ 。

同理  $PF \parallel$  平面  $ADE$ ，又因为  $CF \cap PF = F$ ，

所以平面  $PCF \parallel$  平面  $ADE$ 。

因为  $CP \subset$  平面  $PCF$ ，

所以  $CP \parallel$  平面  $ADE$ .....10 分（证）

所以在 BD 上存在点 P，使得  $CP \parallel$  平面  $ADE$ 。

$\because AE \parallel CF$ ， $AF \parallel CE$ ， $\therefore$  四边形  $AECF$  是平行四边形， $\therefore AF = CE = 1$ ，

$\therefore FB = 4$ ，

又  $PF \parallel AD$ ，

$$\therefore \frac{BP}{BD} = \frac{BF}{AB} = \frac{4}{5}.$$

由（1）知  $DG \perp$  平面  $ABCE$ ，点 P 到平面  $ABCE$  的距离  $d = \frac{4}{5}DG = \frac{4}{5}\sqrt{2}$

$$V_{P-ABC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot d = \frac{4\sqrt{2}}{3} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

方法二：存在点 P，此时  $\frac{BP}{BD} = \frac{4}{5}$ .....7 分

过点 P 作  $PF \parallel AB$ ，连接 EF、PC.....8 分

$$\text{因为 } AB=5, \frac{BP}{BD} = \frac{4}{5}$$

所以  $PF = EC = 1$ ， $PF \parallel EC$

所以四边形  $EFPC$  为平行四边形，所以  $CP \parallel EF$

因为  $CP \not\subset$  平面  $ADE$ ， $EF \subset$  平面  $ADE$

所以  $CP \parallel$  平面  $ADE$ .....10 分

$$\text{因为 } PF \parallel AB, \therefore \frac{PF}{AB} = \frac{1}{5}, \text{ 所以 } \frac{BP}{BD} = \frac{4}{5}$$

由（1）知  $DG \perp$  平面  $ABCE$ ，点 P 到平面  $ABCE$  的距离  $d = \frac{4}{5}DG = \frac{4}{5}\sqrt{2}$

$$V_{P-ABC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot d = \frac{4\sqrt{2}}{3} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21.解：(1) 易知  $f(x)$  不是常值函数，

$\because f(x) = \frac{1}{2}x^2 - a \ln x + 1$  在  $[1, 2]$  上是增函数，

故  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 8$ ,

(2) 因为  $2a + b + c = 1$ , 由柯西不等式得

$(4a^2 + b^2 + 9c^2)(1 + 1 + \frac{1}{9}) \geq (2a + b + c)^2 = 1$ .....8 分

故当且仅当  $2a = b = 9c$  且  $2a + b + c = 1$  时等号成立

即当且仅当  $a = \frac{9}{38}$ ,  $b = \frac{9}{19}$ ,  $c = \frac{1}{19}$  时成立则  $4a^2 + b^2 + 9c^2 \geq \frac{9}{19}$ . .....10 分

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：[www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线