

临沂市 2021 级普通高中学科素养水平监测试卷

数学试题参考答案及评分标准

2023.7

说明:

- 一、本解答只给出了一种解法供参考,如考生的解法与本解答不同,可根据试题的主要考查内容参照评分标准酌情赋分.
- 二、当考生的解答在某一步出错误时,如果后继部分的解答未改该题的内容与难度,可视影响的程度决定后继部分的给分,但不得超过该部分正确答案应得分数一半;如果后继部分的解答有较严重的错误或又出现错误,就不再给分.
- 三、解答右端所注分数,表示考生正确做到这一步应得的累加分数.
- 四、只给整数分数,选择题和填空题不给中间分.

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1.B 2.B 3.D 4.C 5.D 6.A 7.D 8.C

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9.ACD 10.AC 11.BC 12.ABD

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. $-\frac{1}{4}$ 14. $\frac{1}{3}$ 15. 5.1% 16. 8π

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 解:(1)由总成本 $f(x) = \frac{1}{12}x^2 + x + 3$,

可得每台机器人的平均成本 $y = \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{1}{12}x^2 + x + 3}{x} = \frac{1}{12}x + \frac{3}{x} + 1 (x \in \mathbf{N}^*)$ 2 分

因为 $y = \frac{1}{12}x + \frac{3}{x} + 1 \geq 2\sqrt{\frac{1}{12}x \cdot \frac{3}{x}} + 1 = 2$ 4 分

当且仅当 $\frac{1}{12}x = \frac{3}{x}$, 即 $x = 6$ 时, 等号成立. 5 分

所以要使所购机器人的平均成本最低, 应购买 6 台机器人. 6 分

(2) 当 $1 \leq m \leq 6$ 时, 每台机器人的日生产量为 $Q = \frac{1}{4}m(12 - m) = -\frac{1}{4}m^2 + 3m$,

所以当 $m=6$ 时, 每台机器人日生产量的最大值为 9 吨. 8 分

当 $m>6$ 时, 每台机器人日生产量为 9 吨.

所以每台机器人的日生产量的最大值为 9 吨. 9 分

所以 m 的最小值为 6. 10 分

18. 解: (1) $\bar{x} = \frac{6+6.2+6.4+6.6+6.8}{5} = 6.4$

$\bar{y} = \frac{20+15+15+10+5}{5} = 13$ 2 分

$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5 \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5 \bar{x}^2} = \frac{409 - 5 \times 6.4 \times 13}{205.2 - 5 \times 6.4^2} = -\frac{35}{2}$ 6 分

$a = \bar{y} - b \bar{x} = 13 - (-\frac{35}{2}) \times 6.4 = 125$ 7 分

$\therefore$ 经验回归方程为 $\hat{y} = -\frac{35}{2}x + 125$ 8 分

(2) 由 (1) 知 $\hat{y} = -\frac{35}{2}x + 125 \geq 41$, 解得 $x \leq 4.8$ 11 分

所以若使每次直播带货销量不低于 41 台, 预估销售单价最多是 4.8 千元. 12 分

19. 解: (1) 函数的定义域为 $x \in \mathbf{R}$,

$\therefore f'(x) = x'e^{x-1} + x(e^{x-1})' = e^{x-1} + xe^{x-1} = (x+1)e^{x-1}$,

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = -1$ 2 分

$f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	单调递减	$-\frac{1}{e^2}$	单调递增

..... 4 分

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -1)$ 单调递减, 在区间 $(-1, +\infty)$ 单调递增, 当 $x = -1$ 时,

$f(x)$ 有极小值 $f(-1) = -\frac{1}{e^2}$ 6 分

(2) $g(x) = f(x) - a = 0 (a \in \mathbf{R})$, 则 $a = f(x)$,

函数 $g(x)$ 的零点个数等价于 $y = a$ 与函数 $f(x)$ 图象交点个数. 7 分

令 $f(x) = 0$, 解得 $x = 0$,

当 $x < 0$ 时, $f(x) < 0$; 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$.

$f(x)$ 图象经过特殊点 $(0, 0)$, $(-1, -\frac{1}{e^2})$,

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0$,

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 9 分

所以, 当 $a < -\frac{1}{e^2}$ 时, 函数 $g(x)$ 没有零点;

当 $-\frac{1}{e^2} < a < 0$ 时, 函数 $g(x)$ 有两个零点;

当 $a \geq 0$ 或 $a = -\frac{1}{e^2}$ 时, 函数 $g(x)$ 有一个零点. 12 分

20. 解: (1) 补全 2×2 列联表如下表:

	喜欢	不喜欢	合计
男	20	5	25
女	10	15	25
合计	30	20	50

..... 3 分

零假设 H_0 : 假设喜欢下中国象棋与性别无关,

根据表中的数据计算得到 $\chi^2 = \frac{50 \times (20 \times 15 - 50)^2}{30 \times 20 \times 25 \times 25} = \frac{25}{3} \approx 8.333$,

查表可知 $8.333 < 10.828 = \chi_{0.001}^2$, 5 分

根据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的 χ^2 独立性检验, 没有充分证据推断 H_0 不成立, 因此可以认为 H_0 成立, 即认为喜欢下中国象棋与性别无关; 6 分

(2) 在喜欢下中国象棋的学生中按性别采用比例分配的分层抽样抽取, 喜欢下中国象棋的男同学有 $\frac{20}{30} \times 6 = 4$ 人, 喜欢下中国象棋的女同学有 $\frac{10}{30} \times 6 = 2$ 人, X 的可能取值为 0, 1, 2.

..... 7 分

则 $P(X=0) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{2}{5}$, $P(X=1) = \frac{C_4^1 C_2^1}{C_6^2} = \frac{8}{15}$, $P(X=2) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}$, 10 分

所以 X 的分布列如下:

X	0	1	2
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

..... 11 分

X 的数学期望为 $E(X) = 0 \times \frac{2}{5} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{1}{15} = \frac{2}{3}$ 12 分

21. 解: (1) $\because f(x) = \ln x - x, x > 0$,

$\therefore f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$ 1 分

$\therefore f'(1) = \frac{1-1}{1} = 0$, 又 $f(1) = -1$ 3 分

所以函数 $f(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=-1$ 4 分

(2) 解: 设 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=k$, 即 $f(b)-kb=f(a)-ka$, 6 分

令 $h(x)=f(x)-kx=\ln x-(k+1)x, x \in [a, b]$ 满足 $h(a)=h(b)$, 且 $h'(x)=\frac{1}{x}-k-1$,

..... 8 分

若 $h(x)$ 在区间 (a, b) 单调递增, 此时 $h(a) < h(b)$, 不满足题意;

若 $h(x)$ 在区间 (a, b) 单调递减, 此时 $h(a) > h(b)$, 不满足题意;

所以函数 $h(x)$ 在区间 (a, b) 上不是单调函数, 所以函数 $h(x)$ 在区间 (a, b) 上必有极值点, 10 分

即 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $h'(\xi)=\frac{1}{\xi}-k-1=0$, 即 $k=\frac{1}{\xi}-1$, 11 分

即 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{1}{\xi}-1$ 12 分

22. 解: (1) 由题意可知, X 的可能取值为 $-1, 0, 1$,

$$P(X=-1) = (1-\frac{2}{3}) \times (1-\frac{1}{2}) = \frac{1}{6};$$

$$P(X=0) = \frac{2}{3} \times (1-\frac{1}{2}) + (1-\frac{2}{3}) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

$$P(X=1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}; \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

故 X 的分布列如下:

X	-1	0	1
$P(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

$$\text{则 } E(X) = -1 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{①由题意可知, } P_1=1, P_2=1, P_3=1-(\frac{1}{3})^3=\frac{26}{27}, P_4=1-(\frac{1}{3})^3-\frac{2}{3} \times (\frac{1}{3})^3=\frac{76}{81}; \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

②经分析可得:

P	第 n 轮	第 $n-1$ 轮	第 $n-2$ 轮
$\frac{2}{3}P_{n-1}$	没有得 1 分		
$\frac{2}{9}P_{n-2}$	得 1 分	没有得 1 分	
$\frac{2}{27}P_{n-3}$	得 1 分	得 1 分	没有得 1 分

$$\text{故 } P_n = \frac{2}{3}P_{n-1} + \frac{2}{9}P_{n-2} + \frac{2}{27}P_{n-3} (n \geq 4), \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } a=\frac{2}{3}, b=\frac{2}{9}, c=\frac{2}{27} \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$