树德中学高 2020 级高三下期 2 月开学考试数学试题（理科）参考答案

一、选择题： CBCAC CCDBB CB

二、填空题：13. $\ln 2$ 14. -120 15. 5 16. （1）$\sqrt{21}$ （2）9π

——部分选填题参考解答——

10. 如图，由题意可知 ΔODF 为等腰三角形，$OD=DF$，

则 $x_D=\dfrac{c}{2}$，代入渐近线方程 $y=\dfrac{b}{a}x$，得 $y_D=\dfrac{bc}{2a}$，又 $F(c,0)$，可得中点 $B\left(\dfrac{3c}{4},\dfrac{bc}{4a}\right)$，

将其代入双曲线方程，可得 $\dfrac{9c^2}{16a^2}-\dfrac{c^2}{16a^2}=1$，整理可得 $e^2=2$，$\therefore e=\sqrt{2}$．

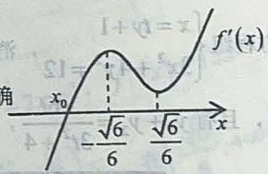
11. 联系函数不等式 $e^x\ge x+1$（当且仅当 $x=0$ 时取等）和 $\ln x\le x-1$（当且仅当 $x=1$ 时取等），

可得：（1）$b=e^{-\frac{3}{5}}>-\dfrac{3}{5}+1=\dfrac{2}{5}=a$；（2）$c=\ln 5-\ln 4=\ln\dfrac{5}{4}<\dfrac{5}{4}-1=\dfrac{1}{4}<\dfrac{2}{5}=a$．

从而有 $b>a>c$．

12. $f(x)=x^4-x^2+x-1$，$f'(x)=4x^3-2x+1$，$f''(x)=12x^2-2=12\left(x+\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)\left(x-\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$，

（1）$f'(x)$ 在 $\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)\nearrow$，在 $\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{6},\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)\searrow$，在 $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{6},+\infty\right)\nearrow$，

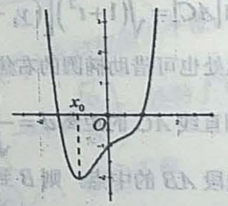


则 $f'(x)$ 大致图象如右所示，可知方程 $f'(x)=k$ 可能有三个根，故①正确

（2）计算得 $f'\left(\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)>0$，则存在 $x_0\in\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$，使得 $f'(x_0)=0$，

从而可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_0)\searrow$，$(x_0,+\infty)\nearrow$，故②正确

（3）计算得 $f\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)<0$，则 $f(x_0)<0$，$f(x)$ 大致图象如右，故③正确



（4）设过原点 O 的直线 $y=kx$ 与 $y=f(x)$ 相切于点 (x_0,y_0)，则有

$y_0=x_0^4-x_0^2+x_0-1$，$k=f'(x_0)=4x_0^3-2x_0+1$，$y_0=kx_0$，

消元整理可得 $3x_0^4-x_0^2+1=0$，易知此方程无解，故④错误．综上，正确的是①②③．

（说明：由 $f(x)=x^4-x^2+x-1=(x-1)(x^3+x^2+1)$，也可以分析 $f(x)$ 的零点个数）

14. 由 $x^2+x^{10}=(x+1-1)^2+(x+1-1)^{10}$，可得 $a_3(x+1)^3=C_{10}^3(x+1)^3(-1)^7=-120(x+1)^3$．

15. **（请同学们结合此题的学习与研究，进一步丰富对抛物线焦点弦的典型性质的认识与积累！）**

【解法简介】过 F 作 AB 的垂线，交准线于 M，连接 MA，由 $AA'=AF$，易证 MA 平分 $\angle A'AF$，则知 M 即已知中的点 P．连接 PB，已知 PB 平分 $\angle B'BF$，可推知 $PA'=PF=PB'$，则 P 恰为 $A'B'$ 的中点，故 $PF=PA'=PB'=5$．

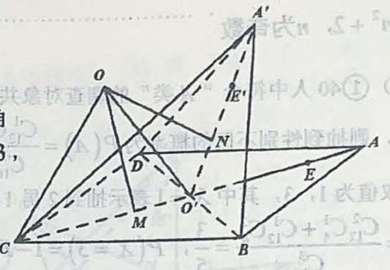
【性质积累】（1）可以证明，以焦点弦 AB 为直径的圆必与准线相切，且切点恰为 $A'B'$ 的中点 P；

（2）连接 PF，可以证明 PF 恰好与此焦点弦 AB 相互垂直；

（3）连接 PA、PB，可以证明 PA 平分 $\angle A'AF$，PB 平分 $\angle B'BF$．（图略）

2023-2 高三数开

16. （1）由题易知，ΔCBD、$\Delta A'B'D$均为等边三角形，取它们的中心M、N，过M、N分别作平面CBD、平面$A'B'D$的垂线，易知两垂线必交于一点O，且点O正是三棱锥$A'-BCD$的外接球球心．（如图所示）



记$AC\cap BD=O'$，则可知二面角$A'-BD-A$的平面角为$\angle A'OC=120^\circ$，在四边形$MO'NO$中，可求得$ON=3$，

则外接球半径$R=\sqrt{ON^2+NA'^2}=\sqrt{21}$；

（2）当截面面积取最小值时，可知$OE'\perp$截面，易求得$|OE'|=2\sqrt{3}$，则截面圆半径$r=\sqrt{R^2-OE'^2}=3$，

故其面积$S=9\pi$．

三、解答题：

17．解：（Ⅰ）由条件可得$a_1+a_2=4$，$a_2+a_3=8$，

因为$\{a_n\}$为等差数列，记公差为d，则有$\begin{cases}2a_1+d=4\\2a_1+3d=8\end{cases}$，从而可解得$a_1=1$，$d=2$，

则$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=a_1+(n-1)d=2n-1$．……………………………………………5分

（Ⅱ）法一：由$a_n+a_{n+1}=4n$，可得$a_{n+1}+a_{n+2}=4(n+1)$，两式相减可得：$a_{n+2}-a_n=4$，

又由$a_1=3$，则$a_1+a_2=4$，所以$a_2=1$，

故数列$\{a_n\}$的奇数项构成以3为首项，4为公差的等差数列；

偶数项构成以1为首项，4为公差的等差数列．……………………………………8分

所以，当n为偶数时，$S_n=\underbrace{(a_1+a_3+\cdots+a_{n-1})}_{共\frac{n}{2}项}+\underbrace{(a_2+a_4+\cdots+a_n)}_{共\frac{n}{2}项}$

$$=\frac{n}{2}\times3+\frac{\frac{n}{2}\times\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2}\times4+\frac{n}{2}\times1+\frac{\frac{n}{2}\times\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2}\times4=n^2;$$

当n为奇数时，$S_n=S_{n-1}+a_n=(n-1)^2+2n+1=n^2+2$．……………………………11分

综上，$S_n=\begin{cases}n^2,&n为偶数\\n^2+2,&n为奇数\end{cases}$．……………………………………………………12分

法二：由$a_n+a_{n+1}=4n$及$a_1=3$，可得$a_1+a_2=4$，则$a_2=1$，那么，

当n为偶数时，$S_n=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_n=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)\cdots+(a_{n-1}+a_n)$

$$=\underbrace{4\times1+4\times3+\cdots+4\times(n-1)}_{共\frac{n}{2}项}=4\times\frac{\frac{n}{2}(1+n-1)}{2}=n^2;$$

当n为奇数时，$S_n=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{n-1}+a_n)$

$$=3+\underbrace{4\times2+4\times4+\cdots+4\times(n-1)}_{共\frac{n-1}{2}项}=3+4\times\frac{\frac{n-1}{2}(2+n-1)}{2}=n^2+2$$………11分

综上，$S_n=\begin{cases}n^2, & n为偶数\\ n^2+2, & n为奇数\end{cases}$. ……………………………………12 分

18．解：（Ⅰ）①40 人中符合“A类”的调查对象共有 16 人，其中男性 12 人，女性 4 人，

从中抽取 2 人，则抽到性别不同的概率为 $P(A)=\dfrac{C_{12}^1C_4^1}{C_{16}^2}=\dfrac{2}{5}$ ……………………………3 分

② X 可能的取值为 1，3，其中 $X=1$ 表示抽到 2 男 1 女或者 2 女 1 男，

则 $P(X=1)=\dfrac{C_{12}^2C_4^1+C_{12}^1C_4^2}{C_{16}^3}=\dfrac{3}{5}$，$P(X=3)=1-P(X=1)=\dfrac{2}{5}$

（注：也可同理直接计算 $P(X=3)=\dfrac{C_{12}^3+C_4^3}{C_{16}^3}=\dfrac{2}{5}$）

故 X 的分布列为

X	1	3
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

其期望 $E(X)=1\times\dfrac{3}{5}+3\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{9}{5}$ ……………………………………………8 分

（Ⅱ）由茎叶图可知，对应的 2×2 列联表如下：

	“非A类”调查对象人数	“A类”调查对象人数	总计
男	8	12	20
女	16	5	20
总计	24	16	40

………10 分

由公式计算可得 $K^2=\dfrac{40\times(8\times4-12\times16)^2}{24\times16\times20\times20}\approx6.667>6.635$，……………………………11 分

故能够在犯错误的概率不超过 1%的前提下，认为调查对象是“A类”与性别有关. ………12 分

19．解：（Ⅰ）如图，取 AE、DE 的中点 M、N，

连接 BM、MN、CN，则知 $MN//AD$，且 $AD=2MN$，

又 $AD//BC$，且 $AD=2BC$，

所以 $MN//BC$，且 $MN=BC$，

则四边形 $BMNC$ 为平行四边形，所以 $CN//BM$.

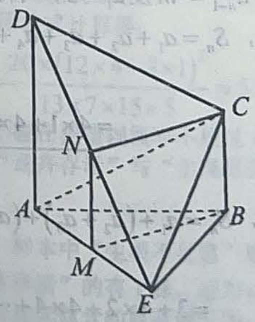
$\because AB=BE$，M 为 AE 的中点，$\therefore BM\perp AE$，

$\because AD\perp$ 平面 ABE，$BM\subset$ 平面 ABE，$\therefore BM\perp AD$，

又 $AD\cap AE=A$，$\therefore BM\perp$ 平面 DAE

从而可得 $CN\perp$ 平面 DAE，由于 $CN\subset$ 平面 DCE，

所以平面 $DCE\perp$ 平面 DAE，命题得证. ……………………………5 分



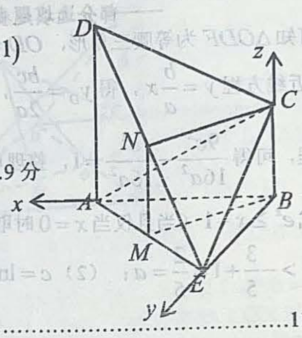
2023-2　高三数开

（Ⅱ）由 $AB=BE=1$ 且 $AE=\sqrt{2}$，得 $AB\perp BE$，
又已知 $AD\perp$ 平面 ABE，$AD//BC$，则有 $BC\perp$ 平面 ABE，
故可如图建立空间直角坐标系 $B-xyz$，……………………………………………………7 分

设 $BC=t(t>0)$，则有 $B(0,0,0)$，$C(0,0,t)$，$E(0,1,0)$，$D(1,0,2t)$，

所以 $\overrightarrow{EC}=(0,-1,t)$，$\overrightarrow{CD}=(1,0,t)$，记平面 DCE 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则有

$\begin{cases}\overrightarrow{EC}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{ED}\cdot\vec{n}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-y+tz=0\\ x+tz=0\end{cases}$，不妨取 $z=1$，可得 $\vec{n}=(-t,t,1)$



而平面 BCE 的一个法向量为 $\vec{m}=(1,0,0)$，

则有 $\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{-t}{\sqrt{2t^2+1}}$，……………………………9 分

由已知，则有 $|\cos\alpha|=|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle|=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，

即得 $\dfrac{t}{\sqrt{2t^2+1}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}(t>0)$，解之可得 $t=\dfrac{1}{2}$……………………………………………………11 分

从而可得 $AD=2BC=2t=1$ 为所求.……………………………………………………………12 分

20．解：（Ⅰ）由 AC 经过 E 椭圆的右焦点 $F(1,0)$，设直线 AC 的方程为 $x=ty+1$，

联立方程组 $\begin{cases}x=ty+1\\ 3x^2+4y^2=12\end{cases}$，消去 x 整理可得 $(3t^2+4)y^2+6ty-9=0$，

显然 $\Delta>0$，且有 $y_1+y_2=\dfrac{-6t}{3t^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{-9}{3t^2+4}$．…………………………………………3 分

法一：则知 $|AC|=\sqrt{(1+t^2)\left[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2\right]}=\cdots=\dfrac{12(t^2+1)}{3t^2+4}$，

（说明：此处也可借助椭圆的右焦点半径公式 $r=a-ex_0$，得到 $|AC|=2a-e(x_1+x_2)$ 求之）

而原点 O 到直线 AC 的距离 $d=\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$，

由于 O 为线段 AB 的中点，则 B 到直线 AC 的距离为 $2d$，

则 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}|AC|\cdot 2d=|AC|\cdot d=\dfrac{12\sqrt{t^2+1}}{3t^2+4}=\dfrac{12}{3\sqrt{t^2+1}+\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}}=\dfrac{12}{3m+\dfrac{1}{m}}$，其中 $m=\sqrt{t^2+1}\geq 1$，

由 $y=3m+\dfrac{1}{m}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，故 $y=3m+\dfrac{1}{m}\geq 4$，

当 $m=\sqrt{t^2+1}=1$，即 $t=0$ 时，等号成立，从而可知，$S_{\Delta ABC}$ 的最大值为3．…………………8 分

法二：注意到 O 为线段 AB 的中点，则 $S_{\Delta ABC}=2S_{\Delta AOC}=|OF|\cdot|y_2-y_1|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$，

则有 $S_{\Delta ABC}=\sqrt{\left(\dfrac{-6t}{3t^2+4}\right)^2-4\times\dfrac{-9}{3t^2+4}}=\dfrac{12(t^2+1)}{3t^2+4}$，以下同法一．……………………………8 分

第4页共2页

（1）当 $a=0$ 时，可知 $g'(x)=\frac{1-x}{x^2}\le 0$，则 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，

从而有 $g(x)<g(1)=0$，不合题意. ……………………………………………………4 分

（2）当 $a\ne 0$ 时，可进一步得到 $g'(x)=\frac{a(x-1)\left(x-\frac{1-a}{a}\right)}{x^2}$

①若 $\frac{1-a}{a}\le 1$，解得 $a\ge\frac{1}{2}$ 或 $a<0$，

1°）当 $a\ge\frac{1}{2}$ 时，可知 $g'(x)\ge 0$，则 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，

从而有 $g(x)\ge g(1)=0$，即有 $f(x)-\ln x\ge 0$ 恒成立，符合题意；……………………7 分

2°）当 $a<0$ 时，可知 $g'(x)\le 0$，则 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，则同理可知其不合题意；

②当 $\frac{1-a}{a}>1$，解得 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，可知 $g'(x)<0\Leftrightarrow 1<x<\frac{1-a}{a}$，

则 $g(x)$ 在 $\left(1,\frac{1-a}{a}\right)$ 上单调递减，从而有 $g(x)<g(1)=0$，不合题意.

综上，a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ ……………………………………………………8 分

（Ⅲ）由（Ⅱ）可知，当 $a\ge\frac{1}{2}$ 时，有 $f(x)\ge\ln x(x\ge 1)$，

令 $a=\frac{1}{2}$，则有 $f(x)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\ge\ln x(x\ge 1)$，且 $x>1$ 时，$\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)>\ln x$

设 $x=\frac{k+1}{k}(k\in N_+)$，则有 $\ln\frac{k+1}{k}<\frac{1}{2}\left(\frac{k+1}{k}-\frac{k}{k+1}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)-\left(1-\frac{1}{k+1}\right)\right]$

从而可得 $\ln(k+1)-\ln k<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)$，$k=1,2,3,\cdots,n$

将上述 n 个不等式依次相加可得

$$\ln(n+1)-\ln 1<\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\right]$$

即 $\ln(n+1)<\frac{1}{2}\left[1+2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n+1}\right]=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2(n+1)}$

从而可得 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{2(n+1)}>\ln(n+1)(n\in N_+)$ 成立. ……………………12 分

理） 第 5 页共 2 页

22．解：（Ⅰ）由题可得 $\rho^2=\dfrac{2}{1+\sin^2\theta}$，即有 $\rho^2+\rho^2\sin^2\theta=2$，

结合转换公式 $\rho^2=x^2+y^2$，$\rho\sin\theta=y$，代入整理 $x^2+2y^2=2$，

经检验，曲线 C 的直角坐标方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$．……………………………………5分

（Ⅱ）由已知易得，直线 l 经过定点 $(-1,0)$，且其倾斜角为 $\dfrac{\pi}{4}$，

由此其参数方程也可写为 $\begin{cases}x=-1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）（也称之为该直线的标准参数方程），

将其代入 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，整理可得 $3t^2-2\sqrt{2}t-2=0$，显然其 $\Delta>0$，

设 M、N 两点对应的参数分别为 t_1、t_2，则有 $t_1+t_2=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$t_1t_2=-\dfrac{2}{3}$，

所以 $|MN|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$．……………………………………10分

（说明：显然，此问也可直接解出参数值求之，或者用直线的普通方程与曲线 C 联立求解之．）

23．解：（Ⅰ）法一：由题得 $f(x)=\begin{cases}-1,x\le1\\ 2x-3,1<x<2\\ 1,x\ge2\end{cases}$，

其中，当 $1<x<1$ 时，$f(x)\in(-1,1)$，从而易得函数 $f(x)$ 的值域为 $[-1,1]$．…………………5分

法二：由绝对值不等式的性质可得，$|f(x)|=||x-1|-|x-2||\le|(x-1)-(x-2)|=1$，

所以 $-1\le f(x)\le1$，当且仅当 $(x-1)(x-2)\ge0$，即 $x\le1$ 或 $x\ge2$ 时取得等号，

故函数 $f(x)$ 的值域为 $[-1,1]$．……………………………………………………5分

（Ⅱ）法一：由基本不等式，得 $\dfrac{1}{2a^2}+\dfrac{1}{2b^2}=\left(\dfrac{1}{2a^2}+\dfrac{1}{2b^2}\right)(a^2+b^2)=1+\dfrac{b^2}{2a^2}+\dfrac{a^2}{2b^2}\ge2$，

当且仅当 $a=b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时取得等号，故 $\dfrac{1}{2a^2}+\dfrac{1}{2b^2}$ 的最小值为2．……………………7分

法二：由柯西不等式，得 $\dfrac{1}{2a^2}+\dfrac{1}{2b^2}=\left(\dfrac{1}{2a^2}+\dfrac{1}{2b^2}\right)(a^2+b^2)\ge\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=2$，

当且仅当 $a=b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时取得等号，故 $\dfrac{1}{2a^2}+\dfrac{1}{2b^2}$ 的最小值为2．……………………7分

由题得，$4f(x)\le 2$，即$|x-1|-|x-2|\le\frac{1}{2}$，结合（Ⅰ）之法一（零点分段，讨论求解）

等价于$\begin{cases}x\le 1\\ -1\le\frac{1}{2}\end{cases}$或$\begin{cases}1<x<2\\ 2x-3\le\frac{1}{2}\end{cases}$或$\begin{cases}x\ge 2\\ 1\le\frac{1}{2}\end{cases}$，由此可解得$x\le\frac{7}{4}$，……10分

故原不等式的解集为$\left(-\infty,\frac{7}{4}\right]$．……

（理）　第6页共2页

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。