东北育才学校科学高中部2023年高考模拟考试数学科试题

命题人：高三数学组

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知P，Q为R的两个非空真子集，若$\complement_R Q \quad \complement_R P$，则下列结论正确的是（　　）

A. $\forall x \in Q$，$x \in P$

B. $\exists x_0 \in \complement_R P$，$x_0 \in \complement_R Q$

C. $\exists x_0 \notin Q$，$x_0 \in P$

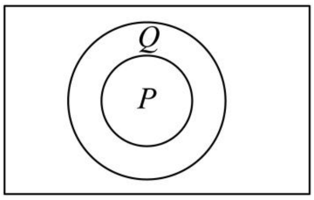
D. $\forall x \in \complement_R P$，$x \in \complement_R Q$

【答案】B

【解析】

【分析】根据条件画出Venn图，根据图形，判断选项．

【详解】因为$\complement_R Q \quad \complement_R P$，所以$P \quad Q$，如图，



对于选项A：由题意知 P是 Q的真子集，故$\exists x \in Q$，$x \notin P$，故不正确，

对于选项B：由$\complement_R Q$是$\complement_R P$的真子集且$\complement_R Q$，$\complement_R P$都不是空集知，$\exists x_0 \in \complement_R P$，$x_0 \in \complement_R Q$，故正确．

对于选项C：由$\complement_R Q$是$\complement_R P$的真子集知，$\forall x \notin Q$，$x \notin P$，故不正确，

对于选项D：Q是$\complement_R P$的真子集，故$\exists x \in \complement_R P$，$x \notin \complement_R Q$，故不正确，

故选：B

2. 已知复数z满足$(1+2i)z = i^{2023}$，则$|\bar{z}| =$（　　）

A. $\dfrac{1}{5}$　　B. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\dfrac{3}{5}$　　D. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

【答案】B

【解析】

【分析】方法一：先化简复数，求出z，在写出它的共轭复数$\bar{z}$，最后利用公式计算即可；

方法二：先化简复数，利用$|\bar{z}| = |z|$即可．

【详解】方法一：因为$i^{4n} = 1$，$i^{4n+1} = i$，$i^{4n+2} = -1$，$i^{4n+3} = -i$，

所以$i^{2023} = i^{4\times 505+3} = i^3 = -i$，

所以$\left(1+2\mathrm{i}\right)z=\mathrm{i}^{2023}\Rightarrow z=-\dfrac{\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=-\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$，

所以$\overline{z}=-\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$，

所以$\left|\overline{z}\right|=\sqrt{\left(-\dfrac{2}{5}\right)^2+\left(\dfrac{1}{5}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

方法二：由$\left(1+2\mathrm{i}\right)z=\mathrm{i}^{2023}\Rightarrow z=-\dfrac{\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=-\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$，

所以$\left|\overline{z}\right|=\left|z\right|=\sqrt{\left(-\dfrac{2}{5}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{5}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

故选：B．

3．已知随机变量X,Y 分别满足$X\sim B(8,p)$，$Y\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，且期望$E(X)=E\left(Y\right)$，又$P(Y\geq 3)=\dfrac{1}{2}$，则$p=$（　　）

A. $\dfrac{1}{8}$　　B. $\dfrac{1}{4}$　　C. $\dfrac{3}{8}$　　D. $\dfrac{5}{8}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用正态分布的对称性可求得μ，根据二项分布以及正态分布的均值，结合题意列方程，可求得答案.

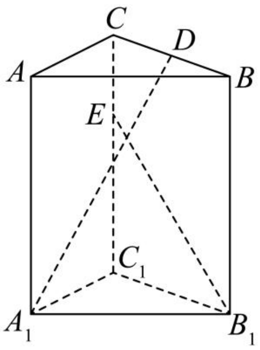
【详解】由题意知$X\sim B(8,p)$，$Y\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，$E(X)=E\left(Y\right)$，

故$8p=\mu$，

由$P(Y\geq 3)=\dfrac{1}{2}$，知$\mu=3$，故$8p=3,\therefore p=\dfrac{3}{8}$，

故选：C

4. 如图，在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$2BB_1=3AB$，D是棱BC的中点，E在棱CC_1上，且$CC_1=3CE$，则异面直线A_1D与B_1E所成角的余弦值是（　　）



A. $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$　　B. $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$　　C. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】取棱 BB_1 靠近点 B 的三等分点 F，取棱 B_1C_1 的中点 H，取 B_1F 的中点 G，连接 A_1H，DH，A_1F，DF．证明 $DF//B_1E$，得 $\angle A_1DF$ 是异面直线 A_1D 与 B_1E 所成的角（或补角）．设 $AB=4$，用余弦定理计算出余弦值．

【详解】取棱 BB_1 靠近点 B 的三等分点 F，取棱 B_1C_1 的中点 H，取 B_1F 的中点 G，连接 A_1H，DH，A_1F，DF．

由已知 $CE=\dfrac{1}{3}CC_1=\dfrac{1}{3}BB_1=B_1G$，又 $CE // B_1G$，所以 CEB_1G 是平行四边形，$B_1E // CG$，

同时可得 F 是 BG 中点，而 D 是 BC 中点，所以 $DF//CG$．

所以 $DF//B_1E$，则 $\angle A_1DF$ 是异面直线 A_1D 与 B_1E 所成的角（或补角）．

又 $DH // CC_1$，$CC_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，则 $DH\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，$A_1H\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，则 $DH\perp A_1H$，

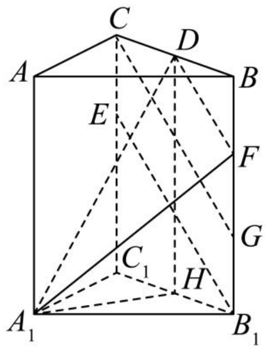
设 $AB=4$，则 $BB_1=6$，从而 $A_1H=2\sqrt{3}$，$DH=6$，$BD=2$，$BF=2$，$B_1F=A_1B_1=4$，

故 $A_1F=4\sqrt{2}$，$A_1D=4\sqrt{3}$，$DF=2\sqrt{2}$．在 $\triangle A_1DF$ 中，

由余弦定理可得 $\cos\angle A_1DF=\dfrac{A_1D^2+DF^2-A_1F^2}{2A_1D\cdot DF}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$．

所以异面直线 A_1D 与 B_1E 所成的角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$．

故选：B．



5. 若等比数列的前 n 项，前 $2n$ 项，前 $3n$ 项的和分别为 A，B，C，则（　　）

A. $A+B=C$　　B. $B^2=AC$

C. $A^2+B^2=C(A+B)$　　D. $A(C-A)=B(B-A)$

【答案】D

【解析】

【分析】利用等比数列的性质可得 $\dfrac{S_{2n}-S_n}{S_n}=q^n,\dfrac{S_{3n}-S_{2n}}{S_{2n}-S_n}=q^n$，所以 $\dfrac{B-A}{A}=\dfrac{C-B}{B-A}$，进行整理可得答案.

【详解】有题意可知：$A=S_n,B=S_{2n},C=S_{3n}$,由等比数列的性质可得：$\dfrac{S_{2n}-S_n}{S_n}=q^n$，$\dfrac{S_{3n}-S_{2n}}{S_{2n}-S_n}=q^n$，

所以 $\dfrac{B-A}{A}=\dfrac{C-B}{B-A}$，整理可得：$A^2+B^2=A(B+C)$，进而得 $A(C-A)=B(B-A)$

故选：D

6. 设函数 $f(x)=\cos\left(\omega x-\dfrac{2\pi}{3}\right)(\omega>0)$，已知 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上有且仅有 4 个零点，则下列说法错误的是（　　）

A. ω 的取值范围是 $\left[\dfrac{19}{6},\dfrac{25}{6}\right)$

B. $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=1$ 在 $(0,\pi)$ 上的交点恰有 2 个

C. $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=-1$ 在 $(0,\pi)$ 上的交点可能有 2 个

D. $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减

【答案】D

【解析】

【分析】由 $x\in[0,\pi]$ 可求得 $\omega x-\frac{2\pi}{3}$ 的取值范围，结合已知条件可得出关于 ω 的不等式组，解出 ω 的取值范围，可判断 A 选项；在 $x\in(0,\pi)$ 时，由 $f(x)=1$ 可得出 $\omega x-\frac{2\pi}{3}$ 的值，可判断 B 选项；取 $3\pi<\pi\omega-\frac{2\pi}{3}<\frac{7\pi}{2}$，由 $f(x)=-1$ 可得出 $\omega x-\frac{2\pi}{3}$ 的可能取值，可判断 C 选项；利用余弦型函数的单调性可判断 D 选项.

【详解】对于 A 选项，因为 $\omega>0$，当 $x\in[0,\pi]$ 时，$-\frac{2\pi}{3}\le\omega x-\frac{2\pi}{3}\le\pi\omega-\frac{2\pi}{3}$，

因为函数 $f(x)=\cos\left(\omega x-\frac{2\pi}{3}\right)$ 在 $[0,\pi]$ 上有且仅有 4 个零点，

所以，$\frac{5\pi}{2}\le\omega\pi-\frac{2\pi}{3}<\frac{7\pi}{2}$，解得 $\frac{19}{6}\le\omega<\frac{25}{6}$，A 对；

对于 B 选项，当 $x\in(0,\pi)$ 时，$-\frac{2\pi}{3}<\omega x-\frac{2\pi}{3}<\pi\omega-\frac{2\pi}{3}$ 且 $\frac{5\pi}{2}\le\omega\pi-\frac{2\pi}{3}<\frac{7\pi}{2}$，

由 $f(x)=\cos\left(\omega x-\frac{2\pi}{3}\right)=1$ 可得 $\omega x-\frac{2\pi}{3}=0$ 或 2π，

故 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=1$ 在 $(0,\pi)$ 上的交点恰有 2 个，B 对；

对于 C 选项，若 $3\pi<\pi\omega-\frac{2\pi}{3}<\frac{7\pi}{2}$，即当 $\frac{11}{3}<\omega<\frac{25}{6}$ 时，

由 $f(x)=\cos\left(\omega x-\frac{2\pi}{3}\right)=-1$，可得 $\omega x-\frac{2\pi}{3}=\pi$ 或 3π，

所以，$y=f(x)$ 的图象与直线 $y=-1$ 在 $(0,\pi)$ 上的交点可能有 2 个，C 对；

对于 D 选项，当 $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\frac{\pi\omega}{4}-\frac{2\pi}{3}<\omega x-\frac{2\pi}{3}<\frac{\pi\omega}{2}-\frac{2\pi}{3}$，

因为 $\frac{19}{6}\le\omega<\frac{25}{6}$，则 $\frac{\pi}{8}\le\frac{\pi\omega}{4}-\frac{2\pi}{3}<\frac{3\pi}{8}$，$\frac{11\pi}{12}\le\frac{\pi\omega}{2}-\frac{2\pi}{3}<\frac{17\pi}{12}$，

所以，函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 不一定单调递减，D 错.

故选：D.

7. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，若 $f(2x+1)-1$ 为奇函数，$f\left(\frac{3}{2}x+2\right)$ 为偶函数，$f(0)=3$，则下列结论一定正确的是（　　）

A. 函数 $f(x)$ 的周期为 3　　　　B. $f(-1)=-1$

C. $f\left(2023\right)=0$　　D. $f\left(2022\right)=-1$

【答案】D

【解析】

【分析】由条件结合奇函数和偶函数的性质可得 $f\left(x\right)=2-f\left(2-x\right)$，$f\left(x\right)=f\left(4-x\right)$，由此可得 $2-f\left(x\right)=f\left(x+2\right)$，再证明 $f\left(x\right)$ 为周期为4的函数，通过赋值可得 $f\left(-1\right)=1$，$f\left(2\right)=-1$，由此判断B，结合周期函数定义判断A，根据周期函数性质判断CD.

【详解】因为 $f\left(2x+1\right)-1$ 为奇函数，

所以 $f\left(-2x+1\right)-1=-f\left(2x+1\right)+1$，

将 x 代换为 $\dfrac{1-x}{2}$ 可得，$f\left(x\right)=2-f\left(2-x\right)$，

取 $x=1$ 可得，$f\left(1\right)=1$，取 $x=2$ 可得，$f\left(2\right)=2-f\left(0\right)$，

又 $f\left(0\right)=3$，所以 $f\left(2\right)=-1$，

因为 $f\left(\dfrac{3}{2}x+2\right)$ 为偶函数，

所以 $f\left(-\dfrac{3}{2}x+2\right)=f\left(\dfrac{3}{2}x+2\right)$，

将 x 代换为 $\dfrac{4-2x}{3}$ 可得，$f\left(x\right)=f\left(4-x\right)$，又 $f\left(x\right)=2-f\left(2-x\right)$

所以 $2-f\left(2-x\right)=f\left(4-x\right)$，

将 x 代换为 $2-x$ 可得，$2-f\left(x\right)=f\left(x+2\right)$，

所以 $f\left(x+4\right)=2-f\left(x+2\right)=f\left(x\right)$，

所以函数 $f\left(x\right)$ 为周期函数，周期为4，

由 $2-f\left(x\right)=f\left(x+2\right)$ 取 $x=-1$ 可得 $2-f\left(-1\right)=f\left(1\right)$，又 $f\left(1\right)=1$，

所以 $f\left(-1\right)=1$，B错误；

$f\left(2023\right)=f\left(4\times 506-1\right)=f\left(-1\right)=1$，C 错误；

$f\left(2022\right)=f\left(505\times 4+2\right)=f\left(2\right)=-1$，D 正确；

因为 $f\left(2\right)=-1$，$f\left(-1\right)=1$，所以函数 $f\left(x\right)$ 不是周期为3的函数，A 错误；

故选：D.

8. 已知圆 $C_1:(x+3)^2+y^2=a^2(a>7)$ 和 $C_2:(x-3)^2+y^2=1$，动圆 M 与圆 C_1，圆 C_2 均相切，P 是 $\triangle MC_1C_2$ 的内心，且 $S_{\triangle PMC_1}+S_{\triangle PMC_2}=3S_{\triangle PC_1C_2}$，则 a 的值为（　　）

A. 9　　　　B. 11　　　　C. 17 或 19　　　　D. 19

【答案】C

【解析】

【分析】由两圆方程得圆 C_2 内含于圆 C_1，由 P 是 $\triangle MC_1C_2$ 的内心，且 $S_{\triangle PMC_1}+S_{\triangle PMC_2}=3S_{\triangle PC_1C_2}$ 得 $C_1M+C_2M=3C_1C_2$，动圆 M 内切于圆 C_1，分别讨论圆 C_2 内切、外切于动圆 M，由圆心距得 $C_1M+C_2M=a\pm1$，即可求解

【详解】根据题意：圆 $C_1:(x+3)^2+y^2=a^2(a>7)$，其圆心 $C_1(-3,0)$，半径 $R_1=a$，圆 $C_2:(x-3)^2+y^2=1$，其圆心 $C_2(3,0)$，半径 $R_2=1$，

又因为 $a>7$，所以圆心距 $|C_1C_2|=6<R_1+R_2=a+1$，所以圆 C_2 内含于圆 C_1，

因为 P 为 $\triangle MC_1C_2$ 的内心，设内切圆的半径为 r_0，又由 $S_{\triangle PMC_1}+S_{\triangle PMC_2}=3S_{\triangle PC_1C_2}$，则有 $\frac{1}{2}\times C_1M\times r_0+\frac{1}{2}\times C_2M\times r_0=3\times\frac{1}{2}\times C_1C_2\times r_0$，得 $C_1M+C_2M=3C_1C_2$，

因为动圆 M 与圆 C_1，圆 C_2 均相切，设圆 M 的半径为 r，

（1）当动圆 M 内切于圆 C_1，与圆 C_2 外切（$r<a$），

则有 $C_1M=R_1-r=a-r$，$C_2M=R_2+r=1+r$，所以 $C_1M+C_2M=a+1$，所以 $3C_1C_2=18=a+1$，得 $a=17$；

（2）当动圆 M 内切于圆 C_1，圆 C_2 内切于动圆 M，

则有 $C_1M=R_1-r=a-r$，$C_2M=r-R_2=r-1$，所以 $C_1M+C_2M=a-1$，所以 $3C_1C_2=18=a-1$，得 $a=19$.

综上可得：$a=17$ 或 19；

故选：C.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分

9. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 所对的边分别 a，b，c，$\sin A=2\sin B\sin C$，下列说法正确的是（　　）

A. 若 $a=1$，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{3}{4}$

B. $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 $\frac{bc}{a}$

C. $\frac{c}{b}+\frac{b}{c}$ 取得最小值时，$A=\frac{\pi}{3}$

D. $A=\frac{\pi}{4}$ 时，$\frac{c}{b}+\frac{b}{c}$ 取得最大值为 $2\sqrt{2}$

【答案】BD

【解析】

【分析】对 A，由正弦定理化简 $\sin A=2\sin B\sin C$ 可得 $\sin C=\frac{1}{2b}$，再根据三角形面积公式判断即可；对 B，根据 $a=2b\sin C$ 结合正弦定理判断即可；对 C，根据正弦定理与余弦定理化简 $\sin A=2\sin B\sin C$ 可得 $2\sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{b}{c}+\frac{c}{b}$，再根据基本不等式与三角函数性质判断即可；对 D，根据三角函数值域求解即可.

【详解】对 A，由正弦定理 $\sin A=2\sin B\sin C$ 即 $a=2b\sin C$，又 $a=1$，故 $\sin C=\frac{1}{2b}$，故三角形面积为 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 1\times b\times\frac{1}{2b}=\frac{1}{4}$，故 A 错误；

对 B，$a=2b\sin C$，则 $\sin C=\frac{a}{2b}$，设 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 R，则 $2R=\frac{c}{\sin C}$，故 $R=\frac{c}{2\times\frac{a}{2b}}=\frac{bc}{a}$，故 B 正确；

对 C，由 $\sin A=2\sin B\sin C$ 及正弦定理可得 $a^2=2bc\sin A$，由余弦定理 $2bc\sin A=b^2+c^2-2bc\cos A$，即 $2bc(\sin A+\cos A)=b^2+c^2$，化简可得 $2\sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{b}{c}+\frac{c}{b}$，由基本不等式，$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 2\sqrt{\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{b}}=2$，当且仅当 $b=c$ 时取等号，此时 $\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故当 $A=\frac{\pi}{2}$，$B=C=\frac{\pi}{4}$ 时，$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}$ 取得最小值 2，故 C 错误；

对 D，由 C，$2\sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{b}{c}+\frac{c}{b}$，当 $A=\frac{\pi}{4}$ 时，$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}$ 取得最大值 $2\sqrt{2}$，故 D 正确；

故选：BD

10. 在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，E,F,G 分别为棱 BB'，DD'，CC' 上的一点，且 $\frac{D'F}{D'D}=\frac{B'E}{B'B}=\frac{CG}{C'C}=\lambda$，$H$ 是 $B'C'$ 的中点，I 是棱 $C'D'$ 上的动点，则（　　）

A. 当 $\lambda=\frac{1}{3}$ 时，$G\in$ 平面 AEF

B. 当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，$AC'\subset$ 平面 AEF

C. 当$0<\lambda<1$时，存在点I，使A,F,H,I四点共面

D. 当$0<\lambda<1$时，存在点I，使FI，EH，CC'三条直线交于同一点

【答案】BCD

【解析】

【分析】利用图形，根据空间中点线面的位置关系逐一对各项进行判断即可得出结果.

【详解】对于A，当$\lambda=\dfrac{1}{3}$时，如图1，在CC'取点M，使$MC'=\dfrac{1}{3}MC$，取CD中点N，易知$GN//MD//EA$，GNË 平面AEF，故$G\notin$平面AEF，所以选项A错误；

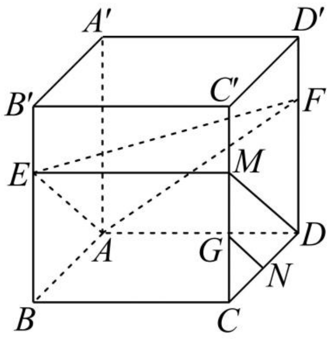


图1

对于B，如图2，当$\lambda=\dfrac{1}{2}$时，E,F,G分别为BB'，DD'，CC'的中点，连接BG，FC'，EC'，GF，易知四边形$BGC'E$与$ABGF$均为平行四边形，则$BG//AF$，$BG//EC'$，所以$AF//EC'$，则A，F，E，C四点共面，$AC'\subset$平面AEF，所以选项B正确；

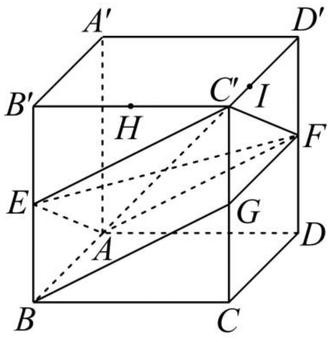


图2

对于C，如图3，延长AF与$A'D'$的延长线交于点M，连接MH与$C'D'$的交点即为点I，则A，F，H，I四点共面，所以选项C正确；

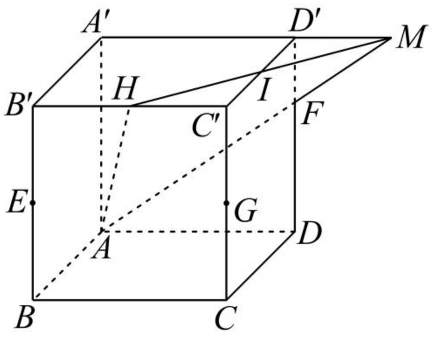


图3

对于 D，如图 4，连接 EH 并延长与 CC' 的延长线交于点 N，连接 FN 与 $C'D'$ 的交点即为点 I，则存在点 I，使 FI，EH，CC' 三条直线交于同一点 N，所以选项 D 正确.

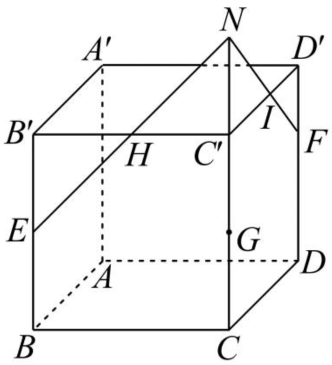


图4

故选：BCD.

11. 已知 $a>1$，$b>1$，$\frac{a}{a-1}=2^a$，$\frac{b}{b-1}=\log_2 b$，则以下结论正确的是（　　）

A. $a+2^a=b+\log_2 b$

B. $\frac{1}{2^a}+\frac{1}{\log_2 b}=1$

C. $a-b<-2$

D. $a+b>4$

【答案】ABD

【解析】

【分析】先根据题意将条件转化为 a，b 是函数 $h(x)=\frac{x}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$ 分别与函数 $f(x)=2^x$，$g(x)=\log_2 x$ 图象交点的横坐标. 从而得到两交点关于直线 $y=x$ 对称，进而即可判断 A；结合选项 A 整理得到 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，进而即可判断 B；再结合选项 A，构造函数 $\varphi(b)=\log_2 b-b$，根据导函数性质即可判断 C；结合选项 B 即基本不等式(注意：$a^1\ \ b$，即不等式取不到等号)即可判断 D.

【详解】对于 A，由题意知，a，b 是函数 $h(x)=\frac{x}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$ 分别与函数 $f(x)=2^x$，$g(x)=\log_2 x$ 图象交点的横坐标，

由 $y=\frac{1}{x}$ 的图象关于 $y=x$ 对称，

则其向上，向右都平移一个单位后的解析式为 $h(x)=1+\frac{1}{x-1}$，

所以 $h(x)$ 的图象也关于 $y=x$ 对称，

又 $f(x)$， $g(x)$ 两个函数的图象关于直线 $y=x$ 对称，

故两交点 $\left(a,2^a\right)$， $\left(b,\log_2 b\right)$ 关于直线 $y=x$ 对称，

所以 $a=\log_2 b$， $b=2^a$， 故 A 正确；

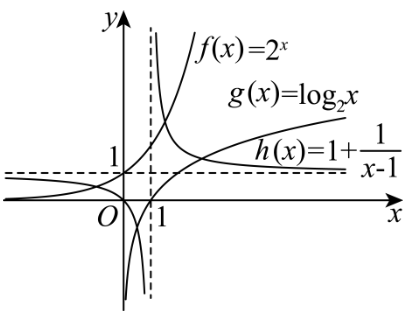
对于 B，结合选项 A 得 $\frac{a}{a-1}=2^a=b$， 则 $ab=a+b$， 即 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$， 即 $\frac{1}{2^a}+\frac{1}{\log_2 b}=1$成立，故 B 正确；

对于 C，结合选项 A 得 $a-b=\log_2 b-b(2<b<4)$，令 $\varphi(b)=\log_2 b-b$，则 $\varphi'(b)=\frac{1}{b\ln 2}-1<0$，

所以 $\varphi(b)=\log_2 b-b$在 $(2,4)$ 上单调递减，则 $\varphi(b)>\log_2 4-4=-2$，故 C 错误；

对于 D，结合选项 B 得 $a+b=(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>4$（$a\neq b$，即不等式取不到等号），故 D 正确．

故选：ABD．



12. 已知双曲线 $\Gamma: x^2-y^2=a^2\left(a>0\right)$ 的左，右焦点分别为 F_1、 F_2，过 F_2 的直线 l 与双曲线 Γ 的右支交于点 B、 C，与双曲线 Γ 的渐近线交于点 A 、 D（A 、 B 在第一象限， C 、 D 在第四象限）， O 为坐标原点，则下列结论正确的是（　　）

A. 若 $BC\perp x$ 轴，则 $\triangle BCF_1$ 的周长为 $6a$

B. 若直线 OB 交双曲线 Γ 的左支于点 E， 则 $BC//EF_1$

C. $\triangle AOD$ 面积的最小值为 $4a^2$

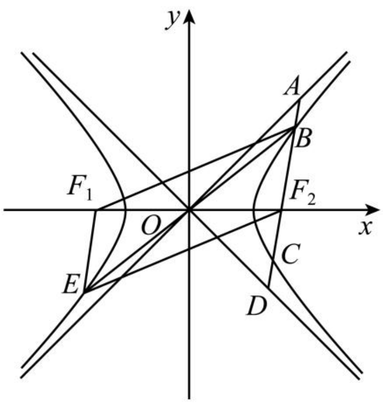
D. $\left|AB\right|+\left|BF_1\right|$ 的取值范围为 $\left(3a,+\infty\right)$

【答案】BD

【解析】

【分析】利用双曲线的定义可判断A选项；利用平行四边形的几何性质可判断B选项；设直线l的方程为$x=my+\sqrt{2}a$，求出$|OA|$、$|OD|$，利用三角形的面积公式结合二次函数的基本性质可判断C选项；由双曲线的定义$|AB|+|BF_1|=|AF_2|+2a$，求出$|AF_2|+2a$关于m的函数关系式，利用函数的单调性可求得$|AB|+|BF_1|$的取值范围，可判断D选项.

【详解】双曲线Γ的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$，则$c=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$，



易知点$F_1\left(-\sqrt{2}a,0\right)$、$F_2\left(\sqrt{2}a,0\right)$，双曲线$\Gamma$的渐近线方程为$y=\pm x$.

对于A选项，当$BC\perp x$轴，直线BC的方程为$x=\sqrt{2}a$，

联立$\begin{cases}x=\sqrt{2}a\\x^2-y^2=a^2\end{cases}$，可得$\begin{cases}x=\sqrt{2}a\\y=\pm a\end{cases}$，此时，$|BC|=2a$，

则$|BF_1|+|CF_1|=\left(|BF_2|+2a\right)+\left(|CF_2|+2a\right)=|BC|+4a=6a$，

此时，$\triangle BCF_1$的周长为$|BC|+|BF_1|+|CF_1|=8a$，A错；

对于B选项，因为双曲线Γ关于原点对称，则点B关于原点O的对称点也在双曲线Γ上，

因为若直线OB交双曲线Γ的左支于点E，则点B、E关于原点对称，

即BE、F_1F_2的中点均为原点，故四边形BF_1EF_2为平行四边形，

所以，$EF_1//BF_2$，即$EF_1//BC$，B对；

对于C选项，易知OA的方程为$y=x$，OD的方程为$y=-x$，所以，$OA\perp OD$，

因为直线l与双曲线Γ的右支交于点B、C，则直线l不与x轴重合，

设直线l的方程为$x=my+\sqrt{2}a$，设点$B\left(x_1,y_1\right)$、$C\left(x_2,y_2\right)$，

联立$\begin{cases}x=my+\sqrt{2}a\\x^2-y^2=a^2\end{cases}$可得$\left(m^2-1\right)y^2+2\sqrt{2}may+a^2=0$，

则$\begin{cases}m^2-1\neq 0\\\Delta=8m^2a^2-4\left(m^2-1\right)a^2=4a^2\left(m^2+1\right)>0\end{cases}$，解得$m\neq\pm1$，

由韦达定理可得$y_1+y_2=-\dfrac{2\sqrt{2}ma}{m^2-1}$，$y_1y_2=\dfrac{a^2}{m^2-1}<0$，可得$-1<m<1$，

联立$\begin{cases}x=my+\sqrt{2}a\\y=x\end{cases}$可得$x=y=\dfrac{\sqrt{2}a}{1-m}$，即点$A\left(\dfrac{\sqrt{2}a}{1-m},\dfrac{\sqrt{2}a}{1-m}\right)$，

联立$\begin{cases}x=my+\sqrt{2}a\\y=-x\end{cases}$可得$x=\dfrac{\sqrt{2}a}{1+m}$，$y=-\dfrac{\sqrt{2}a}{1+m}$，即点$D\left(\dfrac{\sqrt{2}a}{1+m},-\dfrac{\sqrt{2}a}{1+m}\right)$，

所以，$|OA|=\sqrt{1+1^2}\cdot|x_A|=\dfrac{2a}{|1-m|}$，$|OD|=\sqrt{1+(-1)^2}\cdot|x_D|=\dfrac{2a}{|1+m|}$，

所以，$S_{\triangle AOD}=\dfrac{1}{2}|OA|\cdot|OD|=\dfrac{2a^2}{\left|1-m^2\right|}=\dfrac{2a^2}{1-m^2}\geq 2a^2$，当且仅当$m=0$时，等号成立，C 错；

对于 D 选项，$|AB|+|BF_1|=|AB|+|BF_2|+2a=|AF_2|+2a=\sqrt{1+m^2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}a}{1-m}+2a=\sqrt{2}a\cdot\sqrt{\dfrac{1+m^2}{(1-m)^2}}+2a$

$=\sqrt{2}a\cdot\sqrt{\dfrac{1+m^2}{1+m^2-2m}}+2a=\sqrt{2}a\cdot\sqrt{1+\dfrac{2m}{1+m^2-2m}}+2a$，

当$m=0$时，$|AB|+|BF_1|=2a+\sqrt{2}a$，

当$0<m<1$时，$|AB|+|BF_1|=\sqrt{2}a\cdot\sqrt{1+\dfrac{2m}{1+m^2-2m}}+2a=\sqrt{2}a\cdot\sqrt{1+\dfrac{2}{\frac{1}{m}+m-2}}+2a$，

因为函数$y=\dfrac{1}{m}+m-2$在$(0,1)$上单调递减，

此时$|AB|+|BF_1|=\sqrt{2}a\cdot\sqrt{1+\dfrac{2}{\frac{1}{m}+m-2}}+2a\in\left(2a+\sqrt{2}a,+\infty\right)$，

当$-1<m<0$时，因为函数$y=\dfrac{1}{m}+m-2$在$(-1,0)$上单调递减，

此时$|AB|+|BF_1|=\sqrt{2}a\cdot\sqrt{1+\dfrac{2}{\frac{1}{m}+m-2}}+2a\in\left(3a,2a+\sqrt{2}a\right)$，

综上所述，$|AB|+|BF_1|$的取值范围是$(3a,+\infty)$，D 对.

故选：BD.

【点睛】方法点睛：圆锥曲线中取值范围问题的五种求解策略：

（1）利用圆锥曲线的几何性质或判别式构造不等关系，从而确定参数的取值范围；

（2）利用已知参数的范围，求新的参数的范围，解这类问题的核心是建立两个参数之间的等量关系；

（3）利用隐含的不等关系建立不等式，从而求出参数的取值范围；

（4）利用已知的不等关系建立不等式，从而求出参数的取值范围；

（5）利用求函数值域的方法将待求量表示为其他变量的函数，求其值域，从而确定参数的取值范围

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知$\alpha\in(0,\pi),\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$，则$\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$的值为________.

【答案】$-\frac{4\sqrt{2}}{9}$

【解析】

【分析】根据同角的基本关系可得$cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$，再根据正弦的二倍角公式，可得$\sin2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$，再根据诱导公式可得$\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$，由此即可求出结果.

【详解】因为$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$，$\alpha\in(0,\pi)$，$\alpha-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$,又因为$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}<\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$,

所以$\alpha-\frac{\pi}{6}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

所以$cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{1-sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

所以$\sin\left(2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\right)=2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4\sqrt{2}}{9}$,

$$\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left[\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{2}\right]=\cos\left[2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{2}\right]=-\sin\left(2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\right)=-\frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

故答案为：$-\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

14. 某次社会实践活动中，甲、乙两个班的同学共同在一社区进行民意调查．参加活动的甲、乙两班的人数之比为 5:3，其中甲班中女生占$\frac{3}{5}$，乙班中女生占$\frac{1}{3}$．则该社区居民遇到一位进行民意调查的同学恰好是女生的概率是______.

【答案】$\frac{1}{2}$ ##0.5

【解析】

【分析】用 A_1，A_2 分别表示居民所遇到的一位同学是甲班的与乙班的事件，B 表示是女生的事件，由题可知 $P(B|A_1)=\frac{3}{5}$，$P(B|A_2)=\frac{1}{3}$，由全概率公式即得.

【详解】如果用 A_1，A_2 分别表示居民所遇到的一位同学是甲班的与乙班的事件，

B 表示是女生的事件，则$\Omega=A_1\cup A_2$，且 A_1，A_2 互斥，$B\subseteq\Omega$，

由题意可知，$P(A_1)=\frac{5}{8}$，$P(A_2)=\frac{3}{8}$，

且 $P(B|A_1)=\frac{3}{5}$，$P(B|A_2)=\frac{1}{3}$.

由全概率公式可知 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=\frac{5}{8}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$，

即该社区居民遇到一位进行民意调查的同学恰好是女生的概率为$\frac{1}{2}$.

故答案为：$\frac{1}{2}$

15. 已知平面向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，且满足$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$，若$\vec{e}$为平面单位向量，则$\left|\vec{a}\cdot\vec{e}+\vec{b}\cdot\vec{e}\right|$的最大值________

【答案】$2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】先根据平面向量的数量积公式求出$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角，根据条件，可设$\vec{a}=(2,0),\vec{b}=(1,\sqrt{3})$，再设$\vec{e}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，根据平面向量的坐标运算和数量积公式，以及三角恒等变换和三角函数的性质得出$\left|\vec{a}\cdot\vec{e}+\vec{b}\cdot\vec{e}\right|=\left|2\sqrt{3}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right|$，即可求出结果.

【详解】解：$\because \vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=2$，设$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\theta$，

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\theta=2\times2\times\cos\theta=2$，

$\therefore \cos\theta=\frac{1}{2}$，又$\theta\in[0,\pi]$，则$\theta=\frac{\pi}{3}$，

不妨设 $\vec{a}=(2,0),\vec{b}=(1,\sqrt{3})$，再设 $\vec{e}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，

则 $\left|\vec{a}\cdot\vec{e}+\vec{b}\cdot\vec{e}\right|=\left|\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{e}\right|=\left|(3,\sqrt{3})\cdot(\cos\alpha,\sin\alpha)\right|$

$=\left|3\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha\right|=\left|2\sqrt{3}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right|\le 2\sqrt{3}$，

即 $\left|\vec{a}\cdot\vec{e}+\vec{b}\cdot\vec{e}\right|\le 2\sqrt{3}$，

所以 $\left|\vec{a}\cdot\vec{e}+\vec{b}\cdot\vec{e}\right|$ 的最大值为 $2\sqrt{3}$.

故答案为：$2\sqrt{3}$.

16. 设 $n\in N^*$，a_n 为 $(x+4)^n-(x+1)^n$ 的展开式的各项系数之和，$b_n=\left[\frac{a_1}{5}\right]+\left[\frac{2a_2}{5^2}\right]+\ldots+\left[\frac{na_n}{5^n}\right]$（$[x]$表示不超过实数 x 的最大整数），则 $(n-t)^2+(b_n-2+t)^2$（$t\in R$）的最小值为____.

【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】根据展开式求出系数和得 $a_n=5^n-2^n$，求出 $b_n=\frac{n^2-n}{2}$，将 $(n-t)^2+(b_n-2+t)^2$ 转化为点 $\left(n,\frac{n^2-n}{2}\right)$ 到 $(t,2-t)$ 的距离的平方，结合几何意义即可得解.

【详解】a_n 为 $(x+4)^n-(x+1)^n$ 的展开式的各项系数之和，即 $a_n=5^n-2^n$，

$\frac{5^n-2^n}{5^n}=1-\left(\frac{2}{5}\right)^n$，考虑 $f(n)=n\left(\frac{2}{5}\right)^n>0,n\in N^*,2n+2<5n$，

$\frac{f(n+1)}{f(n)}=\frac{(n+1)\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{n\left(\frac{2}{5}\right)^n}=\frac{2(n+1)}{5n}<1$，所以 $f(n)=n\left(\frac{2}{5}\right)^n>0,n\in N^*$ 递减，

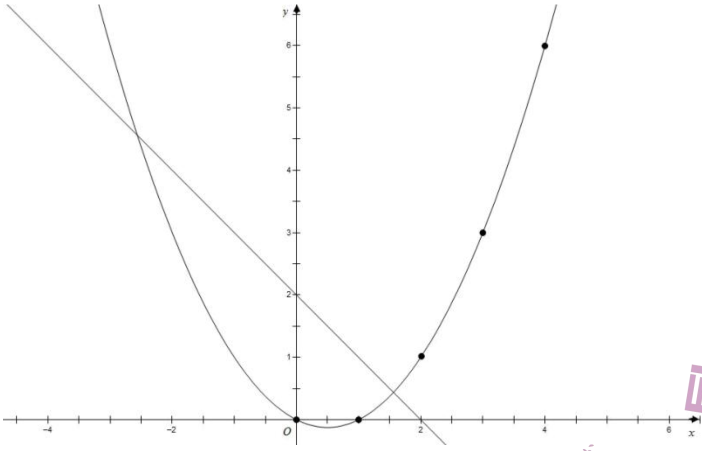
所以 $f(n)=n\left(\frac{2}{5}\right)^n\in\left(0,\frac{2}{5}\right]$，

所以 $\left[\frac{na_n}{5^n}\right]=\left[n-n\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]=n-1$，$b_n=1+2+\ldots+n-1=\frac{n^2-n}{2}$，

$(n-t)^2+(b_n-2+t)^2=(n-t)^2+\left(\frac{n^2-n}{2}-2+t\right)^2$，

可以看成点 $\left(n,\frac{n^2-n}{2}\right)$ 到 $(t,2-t)$ 的距离的平方，

即求点 $\left(n,\frac{n^2-n}{2}\right)$ 到直线 $y=2-x$ 的距离最小值的平方，



由图可得即求点 $(1,0)$ 或 $(2,1)$ 到直线 $x+y-2=0$ 的距离的平方，即 $\left(\frac{|2+1-2|}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$

故答案为：$\frac{1}{2}$

【点睛】此题考查求二项式系数，数列增减性与求和，通过几何意义转化求解代数式的最值，涉及转化与化归思想和数形结合思想.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17．已知函数 $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x+\frac{1}{2},x\in(0,\pi)$.

（1）求 $f(x)$ 的单调递增区间；

（2）设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，角 A 所对边 $a=\sqrt{19}$，角 B 所对边 $b=5$，若 $f(A)=0$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

【答案】（1）$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$；（2）$\frac{15\sqrt{3}}{4}$

【解析】

【分析】（1）利用降次公式化简 $f(x)$，然后利用三角函数单调区间的求法，求得 $f(x)$ 的单调递增区间.

（2）由 $f(A)=0$ 求得 A，用余弦定理求得 c，由此求得三角形 ABC 的面积.

【详解】（1）依题意 $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x+\frac{1}{2}=\cos 2x+\frac{1}{2}\ (x\in(0,\pi))$，由 $2k\pi-\pi\le 2x\le 2k\pi$ 得

$k\pi-\frac{\pi}{2}\le x\le k\pi$，令 $k=1$ 得 $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$.所以 $f(x)$ 的单调递增区间 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

（2）由于 $a<b$，所以 A 为锐角，即 $0<A<\frac{\pi}{2},0<2A<\pi$.由 $f(A)=0$，得 $\cos 2A+\frac{1}{2}=0,\cos 2A=-\frac{1}{2}$，所以 $2A=\frac{2\pi}{3},A=\frac{\pi}{3}$.

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$，$c^2-5c+6=0$，解得 $c=2$ 或 $c=3$.

当 $c=2$ 时，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\frac{\sqrt{19}}{38}<0$，则 B 为钝角，与已知三角形 ABC 为锐角三角形矛盾.所以 $c=3$.

所以三角形 ABC 的面积为 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times5\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

【点睛】本小题主要考查二倍角公式，考查三角函数单调性的求法，考查余弦定理解三角形，考查三角形的面积公式，属于基础题.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{a_n}{a_n+2}=\frac{1}{2}a_{n+1}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，$a_1=1$.

（1）证明：数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 为等差数列，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若记 b_n 为满足不等式 $\left(\frac{1}{2}\right)^n<a_k\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$ 的正整数 k 的个数，数列 $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，求关于 n 的不等式 $S_n<2023$ 的最大正整数解.

【答案】（1）证明见解析，$a_n=\frac{2}{n+1}$

（2）7

【解析】

【分析】（1）在等式 $\frac{a_n}{a_n+2}=\frac{1}{2}a_{n+1}$ 两边取倒数，结合等差数列的定义可证得数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 为等差数列，确定该数列的公差，可求得数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）解不等式 $\left(\frac{1}{2}\right)^n<a_k\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$ 可得到满足条件的正整数 k 的个数，可得出 $\{b_n\}$ 的通项公式，利用错位相减法可求得 S_n，再利用数列的单调性可求得满足题意的最大正整数 n 的值.

【小问 1 详解】

解：由 $\dfrac{a_n}{a_n+2}=\dfrac{1}{2}a_{n+1}$ 取倒数得 $\dfrac{a_n+2}{a_n}=\dfrac{2}{a_{n+1}}\Leftrightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{2}$，即 $\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{2}$，

所以 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 为公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列，则 $\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{n-1}{2}=\dfrac{n+1}{2}$，所以，$a_n=\dfrac{2}{n+1}$.

【小问 2 详解】

解：当 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n<a_k\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ 时，$2^{n-1}\le\dfrac{k+1}{2}<2^n\Leftrightarrow 2^n-1\le k<2^{n+1}-1$，

所以，满足条件的整数 k 的个数为 $\left(2^{n+1}-1\right)-\left(2^n-1\right)=2^n$，即 $b_n=2^n$，

所以，$\dfrac{b_n}{a_n}=(n+1)\cdot 2^{n-1}>0$，故数列 $\{S_n\}$ 单调递增，

所以，$S_n=2\times2^0+3\times2^1+4\times2^2+\cdots+(n+1)\times2^{n-1}$，

则 $2S_n=2\times2^1+3\times2^2+\cdots+n\times2^{n-1}+(n+1)\times2^n$，

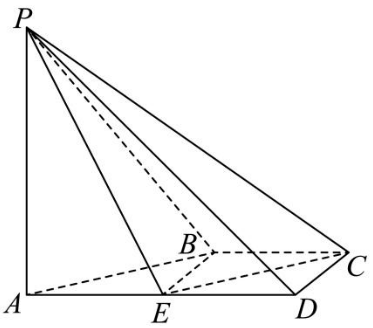
上式－下式得 $-S_n=2+\left(2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}\right)-(n+1)\times2^n=2+\dfrac{2\left(1-2^{n-1}\right)}{1-2}(n+1)\times2^n$

$=-n\times2^n$，所以，$S_n=n\cdot2^n$，

因为 $S_7=7\times2^7=896$，$S_8=8\times2^8=2048$，则 $S_7<2023<S_8$，

因此，满足 $S_n<2023$ 的最大正整数 n 的值为 7.

19. 如图，在四棱锥 P-ABCD 中，AD∥BC，∠ADC=∠PAB=90°，BC=CD=$\frac{1}{2}$AD. E 为棱 AD 的中点，异面直线 PA 与 CD 所成的角为 90°．



（I）在平面 PAB 内找一点 M，使得直线 CM∥平面 PBE，并说明理由；

(II)若二面角 P-CD-A 的大小为 45°，求直线 PA 与平面 PCE 所成角的正弦值.

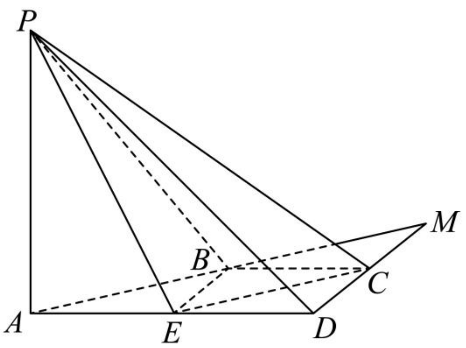
【答案】（Ⅰ）见解析；（Ⅱ）$\frac{1}{3}$.

【解析】

【分析】试题分析：本题考查线面平行、线线平行、向量法等基础知识，考查空间想象能力、分析问题的能力、计算能力.第一问，利用线面平行的定理，先证明线线平行，再证明线面平行；第二问，可以先找到线面角，再在三角形中解出正弦值，还可以用向量法建立直角坐标系解出正弦值.

【详解】:（I）在梯形 ABCD 中，AB 与 CD 不平行.

延长 AB，DC，相交于点 M（M∈平面 PAB），点 M 即为所求的一个点.



理由如下：

由已知，BC∥ED，且 BC=ED.

所以四边形 BCDE 是平行四边形.

从而 CM∥EB.

又 EB⊂平面 PBE，CM ⊄平面 PBE，

所以 CM∥平面 PBE.

（说明：延长 AP 至点 N，使得 AP=PN，则所找的点可以是直线 MN 上任意一点）

（II）方法一：

由已知，CD⊥PA，CD⊥AD，PA⋂AD=A，

所以 CD⊥平面 PAD.

从而 CD⊥PD.

所以∠PDA 是二面角 P-CD-A 的平面角.

所以∠PDA=45°.

设 BC=1，则在 Rt△PAD 中，PA=AD=2.

过点 A 作 AH⊥CE，交 CE 的延长线于点 H，连接 PH.

易知 PA⊥平面 ABCD，

从而 PA⊥CE.

于是 CE⊥平面 PAH.

所以平面 PCE⊥平面 PAH.

过 A 作 AQ⊥PH 于 Q，则 AQ⊥平面 PCE.

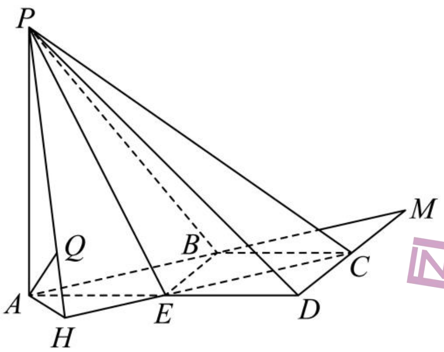
所以∠APH 是 PA 与平面 PCE 所成的角.

在 Rt△AEH 中，∠AEH=45°，AE=1，

所以 AH=$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

在 Rt△PAH 中，PH=$\sqrt{PA^2+AH^2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，

所以 sin∠APH=$\dfrac{AH}{PH}=\dfrac{1}{3}$.



方法二：

由已知，CD⊥PA，CD⊥AD，PA⋂AD=A，

所以 CD⊥平面 PAD.

于是 CD⊥PD.

从而∠PDA 是二面角 P-CD-A 的平面角.

所以∠PDA=45°.

由 PA⊥AB，可得 PA⊥平面 ABCD.

设 BC=1，则在 Rt△PAD 中，PA=AD=2.

作 Ay⊥AD，以 A 为原点，以$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AP}$的方向分别为 x 轴，z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 A-xyz，则 A（0,0,0），P（0,0,2），C(2,1,0)，E(1,0,0)，

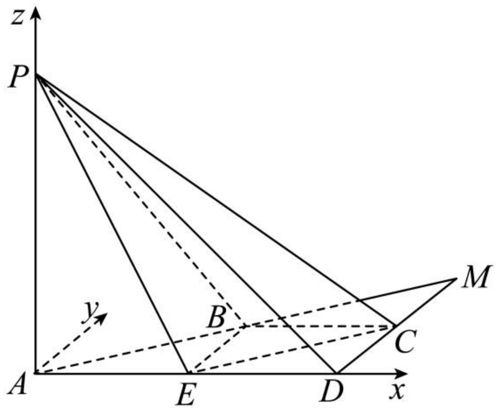
所以$\overrightarrow{PE}$=（1,0,-2），$\overrightarrow{EC}$=（1,1,0），$\overrightarrow{AP}$=（0,0,2）

设平面 PCE 的法向量为 n=(x,y,z)，

由 $\begin{cases} n\cdot\overrightarrow{PE}=0, \\ n\cdot\overrightarrow{EC}=0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x-2z=0, \\ x+y=0, \end{cases}$ 设 x=2，解得 n=(2,-2,1).

设直线 PA 与平面 PCE 所成角为α，则 sinα=$\dfrac{|n\cdot\overrightarrow{AP}|}{|n|\cdot|\overrightarrow{AP}|}=\dfrac{2}{2\times\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\dfrac{1}{3}$.

所以直线 PA 与平面 PCE 所成角的正弦值为 $\dfrac{1}{3}$.



考点：线线平行、线面平行、向量法.

20. 近年来随着新能源汽车的逐渐普及，传统燃油车市场的竞争也愈发激烈.近日，各地燃油车市场出现史诗级大降价的现象，引起了广泛关注.2023 年 3 月以来，各地政府和车企打出了汽车降价促销“组合拳”，被誉为“史上最卷”的汽车降价促销潮从南到北，不断在全国各地蔓延，据不完全统计，十几家车企的近 40 个传统燃油车品牌参与了此次降价，从几千元到几万元助力汽车消费复苏.记发放的补贴额度为 x（千元），带动的销量为 y（千辆）.某省随机抽查的一些城市的数据如下表所示.

x	3	3	4	5	5	6	6	8
y	10	12	13	18	19	21	24	27

（1）根据表中数据，求出 y 关于 x 的线性回归方程.

（2）(i) 若该省 A 城市在 2023 年 4 月份准备发放额度为 1 万元的补贴消费券，利用（1）中求得的线性回归方程，预计可以带动多少销量？

(ii) 当实际值与估计值的差的绝对值与估计值的比值不超过 10% 时，认为发放的该轮消费券助力消费复苏是理想的.若该省 A 城市 4 月份发放额度为 1 万元的消费补贴券后，经过一个月的统计，发现实际带动的消费为 3 万辆，请问发放的该轮消费券助力消费复苏是否理想？若不理想，请分析可能存在的原因.

参考公式：$r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}},\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2},\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$.

参考数据：$\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=69,\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})^2=20$.

【答案】（1）$\hat{y}=3.45x+0.75$；

（2）（i）3.525 万辆；（ii）答案见解析.

【解析】

【分析】（1）根据给定的数表，求出 $\bar{x},\bar{y}$，再利用最小二乘法公式求解作答.

（2）利用（1）的回归方程，计算 $x=10$ 的估计值，再求出比值并判断作答.

【小问 1 详解】

依题意，$\bar{x}=\dfrac{3+3+4+5+5+6+6+8}{8}=5,\ \bar{y}=\dfrac{10+12+13+18+19+21+24+27}{8}=18$,

于是 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{69}{20}=3.45,\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=18-3.45\times5=0.75$，

所以所求线性回归方程为 $\hat{y}=3.45x+0.75$.

【小问 2 详解】

（i）由（1）知，当 $x=10$ 时，$\hat{y}=3.45\times10+0.75=35.25$，

所以预计能带动的消费达 3.525 万辆.

（ii）因为 $\dfrac{|30-35.25|}{35.25}>10\%$，所以发放的该轮消费补贴助力消费复苏不是理想的.

发放消费券只是影响消费的其中一个因素，还有其他重要因素，

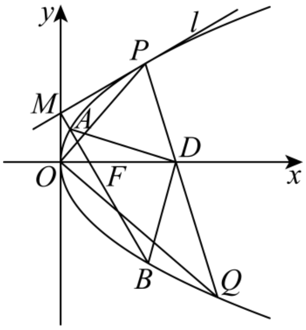
比如：A 城市经济发展水平不高，居民的收入水平直接影响了居民的消费水平；

A 城市人口数量有限、商品价格水平、消费者偏好、消费者年龄构成等因素一定程度上影响了消费总量.

年轻人开始更加注重出行的舒适性和环保性，而传统燃油车的排放和能耗等问题也逐渐成为了消费者们考虑的重点.（只要写出一个原因即可）.

21. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，$D(1,0)$，点 P 是在第一象限内 C 上的一个动点，当 DP 与 x

轴垂直时，$|PF|=\frac{5}{4}$，过点 P 作与 C 相切的直线 l 交 y 轴于点 M，过点 M 作直线 l 的垂线交抛物线 C 于 A，B 两点.



（1）求 C 的方程；

（2）如图，连接 PD 并延长，交抛物线 C 于点 Q.

①设直线 AB，OQ（其中 O 为坐标原点）的斜率分别为 k_1，k_2，证明：$\frac{k_1}{k_2}$ 为定值；

②求 $\frac{S_{\triangle OPQ}}{S_{\triangle ABD}}$ 的最小值.

【答案】（1）$y^2=x$

（2）①证明见解析；②$\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

【解析】

【分析】（1）利用抛物线定义列出方程求解结果；

（2）①设 $P\left(x_0, y_0\right)$，表示直线 PM 的斜率，求解 $k_1=\frac{-1}{k_{PM}}$；将直线 PD 的方程 $y=\frac{\sqrt{x_0}}{x_0-1}(x-1)$ 与 $y^2=x$ 联立，由韦达定理表示 y_Q，求解 $k_2=\frac{y_Q}{x_Q}$ 得出结果；

②求解 $\frac{S_{\triangle OPQ}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{\frac{1}{2}|OD||y_Q-y_0|}{\frac{1}{2}|ND||y_A-y_B|}$ 并化简，结合基本不等式进行求解.

【小问 1 详解】

因为当 DP 与 x 轴垂直时，$|PF|=\frac{5}{4}$，

根据抛物线定义得 $1+\frac{p}{2}=\frac{5}{4}$，解得 $p=\frac{1}{2}$，所以 $C: y^2=x$.

【小问 2 详解】

①证明：设 $P\left(x_0, y_0\right)$，则 $y_0=\sqrt{x_0}$，

由 $y^2=x$，得当 $y>0$ 时 $y=\sqrt{x}$，$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，

所以直线 PM 的斜率为 $\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$，所以直线 $PM: y-y_0=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}\left(x-x_0\right)$，

即 $PM: y=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}x-\dfrac{\sqrt{x_0}}{2}+y_0$，$y=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}x+\dfrac{\sqrt{x_0}}{2}$，所以 $M\left(0,\dfrac{\sqrt{x_0}}{2}\right)$.

又因为 $k_1=\dfrac{-1}{k_{PM}}$，$k_{PM}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$，所以 $k_1=-2\sqrt{x_0}$.

将直线 PD 的方程 $y=\dfrac{\sqrt{x_0}}{x_0-1}(x-1)$ 与 $y^2=x$ 联立并化简，得 $y^2-\dfrac{x_0-1}{\sqrt{x_0}}y-1=0$，

易得 $\Delta>0$，设 $Q\left(x_Q, y_Q\right)$，则 $y_0y_Q=-1$，所以 $y_Q=-\dfrac{1}{y_0}=-\dfrac{1}{\sqrt{x_0}}$.

把点 Q 的坐标代入 $y=\dfrac{\sqrt{x_0}}{x_0-1}(x-1)$，得 $x_Q=\dfrac{1}{x_0}$，

所以 $k_2=\dfrac{y_Q}{x_Q}=-\sqrt{x_0}$. 所以 $\dfrac{k_1}{k_2}=2$，为定值.

②由①得 $\left|y_Q-y_0\right|=\sqrt{x_0}-\left(-\dfrac{1}{\sqrt{x_0}}\right)=\dfrac{x_0+1}{\sqrt{x_0}}$，直线 $AB: y-\dfrac{\sqrt{x_0}}{2}=-2\sqrt{x_0}x$.

将 $y-\dfrac{\sqrt{x_0}}{2}=-2\sqrt{x_0}x$ 与 $y^2=x$ 联立并化简，得 $y^2+\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}y-\dfrac{1}{4}=0$，

易得 $\Delta>0$，则 $y_A+y_B=-\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$，$y_Ay_B=-\dfrac{1}{4}$，

所以 $\left|y_A-y_B\right|=\sqrt{\left(y_A+y_B\right)^2-4y_Ay_B}=\sqrt{\dfrac{1}{4x_0}+1}$.

在直线 AB 的方程 $y-\dfrac{\sqrt{x_0}}{2}=-2\sqrt{x_0}x$ 中，令 $y=0$，得 $x=\dfrac{1}{4}$，

设直线 AB 与 x 轴的交点为 N，则 N 的坐标 $\left(\dfrac{1}{4},0\right)$.

因为$|OD|=1$，所以$|ND|=\frac{3}{4}$，

则$\frac{S_{\triangle OPQ}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{\frac{1}{2}|OD||y_Q-y_0|}{\frac{1}{2}|ND||y_A-y_B|}=\frac{\frac{x_0+1}{2\sqrt{x_0}}}{\frac{3}{8}\sqrt{\frac{1}{4x_0}+1}}=\frac{8(x_0+1)}{3\sqrt{1+4x_0}}=\frac{2}{3}\left[\frac{(1+4x_0)+3}{\sqrt{1+4x_0}}\right]$

$=\frac{2}{3}\left(\sqrt{1+4x_0}+\frac{3}{\sqrt{1+4x_0}}\right)$

$\geq\frac{4}{3}\sqrt{\sqrt{1+4x_0}\cdot\frac{3}{\sqrt{1+4x_0}}}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$，

当且仅当$\sqrt{1+4x_0}=\frac{3}{\sqrt{1+4x_0}}$，即$x_0=\frac{1}{2}$时等号成立，

所以$\frac{S_{\triangle OPQ}}{S_{\triangle ABD}}$的最小值为$\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

22. 已知函数$f(x)=x\cos x$，$g(x)=a\sin x$.

（1）若$a=1$，证明：当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时$x>g(x)>f(x)$；

（2）当$x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$\frac{f(x)}{g(x)}<\frac{\sin x}{x}$，求$a$的取值范围.

【答案】（1）证明见解析

（2）$(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$.

【解析】

【分析】（1）令$h(x)=x-\sin x$，对$h(x)$求导，得到$h(x)$的单调性可证得$x>\sin x$，令$k(x)=\sin x-x\cos x$，对$k(x)$求导，可得$k(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，即可证得$\sin x>x\cos x$，即可证得$x>g(x)>f(x)$；

（2）由题意分析可得要使$\frac{f(x)}{g(x)}<\frac{\sin x}{x}$恒成立即$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$F(x)=\frac{\sin x}{x}-\frac{x\cos x}{a\sin x}>0$恒成立，通过放缩变形证明$F(x)>0$恒成立，即可求出$a$的取值范围.

【小问1详解】

当$a=1$时，$g(x)=\sin x$，所以即证：$x>\sin x>x\cos x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

先证左边：$x>\sin x$，令 $h(x)=x-\sin x$，$h'(x)=1-\cos x>0$，

$h(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增，$\therefore h(x)>h(0)=0$，即 $x>\sin x$.

再证右边：$\sin x>x\cos x$，令 $k(x)=\sin x-x\cos x$，

$k'(x)=\cos x-\cos x+x\sin x=x\sin x>0$，

$\therefore k(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，

$\therefore k(x)>k(0)=0$，即 $\sin x>x\cos x$，

$\therefore x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$x>g(x)>f(x)$.

【小问 2 详解】

$\frac{\sin x}{x}-\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sin x}{x}-\frac{x\cos x}{a\sin x}$，

令 $F(x)=\frac{\sin x}{x}-\frac{x\cos x}{a\sin x}$，$x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

因为 $F(-x)=F(x)$，所以题设等价于 $F(x)>0$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 恒成立，

由（1）知，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$x>\sin x>\cos x$，于是：

①当 $a<0$ 时，$F(x)>0$ 恒成立；

②当 $a>0$ 时，$F(x)>0$ 等价于 $a\sin^2 x-x^2\cos x>0$，

（i）当 $0<a<1$ 时，$a\sin^2 x-x^2\cos x<ax^2-x^2\cos x=x^2(a-\cos x)$，

令 $p(x)=a-\cos x$，因为 $p(x)=a-\cos x$ 在 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上递增，

且 $p(0)=a-1\left\langle 0,p\left(\frac{\pi}{2}\right)=a\right\rangle 0$，所以存在 $\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使 $p(\beta)=0$，

所以当 $0<x<\beta$，$p(x)<0$，即 $x^2(a-\cos x)<0$，不合题意；

(ii)当 $a\geq 1$ 时，$a\sin^2 x-x^2\cos x\geq\sin^2 x-x^2\cos x$

令 $r(x)=\sin^2 x-x^2\cos x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

则 $r'(x)=2\sin x\cos x-2x\cos x+x^2\sin x>2\sin x\cos x-2\sin x+x^2\sin x$，

$$=\left[x^2-2(1-\cos x)\right]\sin x=\left(x^2-4\sin^2\frac{x}{2}\right)\sin x=4\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2-\sin^2\frac{x}{2}\right]\sin x>0$$，

所以 $r(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，

所以 $r(x)>r(0)=0$，所以 $a\sin^2 x-x^2\cos x>0$，所以 $F(x)>0$.

综上：a 的取值范围为 $(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$.

【点睛】方法点睛：利用导数证明不等式或在不等式中求参数的取值范围的问题，常见的几种方法有：

（1）直接构造函数法：证明不等式 $f(x)>g(x)$ 转化为证明 $f(x)-g(x)>0$，进而构造辅助函数

$h(x)=f(x)-g(x)$；

（2）适当放缩构造法：一是根据已知条件适当放缩；二是利用常见放缩结论；

（3）构造“形似”函数，稍作变形再构造，对原不等式同解变形，根据相似结构构造辅助函数.