2020年普通高考（天津卷）适应性测试 答案

第I卷

一、选择题

1.答案：B

解析：$C_UB=\{-2,2\}, A\bigcap C_UB=\{-2,2\}$,故选 B

2.答案：A

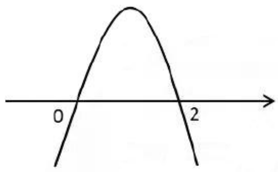
解析：$a^2-3a-2=(a-1)(a-2)\ge 0$，解得：$a\le 1$或$a\ge 2$

所以“$a\ge 2$”是“$a^2-3a+2\ge 0$”充分非必要条件

故选 A

3.答案：A

解析：$y'=\dfrac{2xe^x-x^2e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{x(2-x)}{e^x}$



$x\to+\infty, y\to 0$

$x\to-\infty, y\to+\infty$

故选 A

4.答案：B

解析：$V=\dfrac{1}{3}S_{\Delta BCD}\cdot CE=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}S_{ABCD}\cdot\dfrac{2}{3}h$

$=\dfrac{1}{9}V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}=4$

故选 B

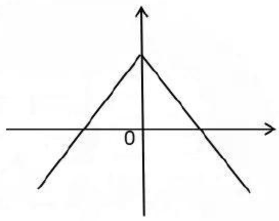
5.答案：C

解析：$a=0.15; t=\dfrac{0.15}{0.5}=3$

故选 C

6.答案：C

解析：$f(x)$的示意图如图所示：



$\log_2\pi\in(1,2)$；　$2^{-\pi}\in(0,1)$

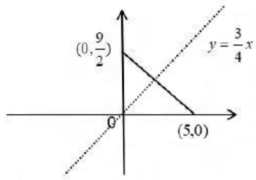
$\log_2\dfrac{1}{3}=-\log_2 3\in(-2,-1)$　即：$|\log_2\dfrac{1}{3}|\in(1,2)$

由$y=\log_2 x$在$(0,+\infty)$单调递增，$\pi>3$可知：$\log_2\pi>\log_2 3$

所以$\log_2\pi>|\log_2\dfrac{1}{3}|>2^{-\pi}$，故$f(\log_2\pi)<f(|\log_2\dfrac{1}{3}|)<f(2^{-\pi})$

且因为$f(x)$为偶函数，所以$f(|\log_2\dfrac{1}{3}|)=f(\log_2\dfrac{1}{3})$　故选 C

7.答案：B



解析：$\frac{3}{4}\times\frac{\frac{p}{2}}{-5}=-1$ 解得：$p=\frac{40}{3}$

8.答案：D

解析：$f(x)=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$

$T=\frac{2\pi}{|w|}=\frac{2\pi}{|1|}=2\pi$，故 A 对

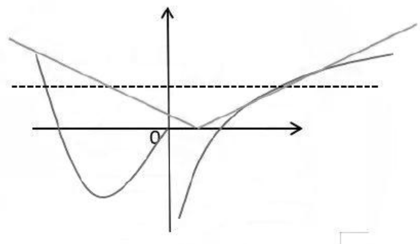
$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$ 解得：$x=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in Z$，令 $k=1,x=\frac{5\pi}{4}$ 故 B 对

$x+\frac{\pi}{4}=k\pi,k\in Z$，解得：$x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in Z$，令 $k=2,x=\frac{7\pi}{4}$ 故 C 对

$x+\frac{\pi}{4}\in(\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4})$，$f(x)$ 在区间 $(\pi,\frac{5\pi}{4})$ 单调递减 故 D 错

9.答案：D

解析：$f(x)=\begin{cases}x^2+2x\\2-\frac{4}{x}\end{cases}$ $g(x)=|kx-1|$



①$k=0$ 显然不符合题意 舍去

②$k>0$ 如图所示

当 $x>0$ 时，需有 2 个零点

$\begin{cases}y=kx-1\\y=\frac{2x-4}{x}\end{cases}$ 可得 $kx-1=\frac{2x-4}{x}$

即：$kx^2-3x+4=0$，可得 $\Delta=9-16k>0$ 解得：$k<\frac{9}{16}$

所以 $k\in(0,\frac{9}{16})$

③$k<0$

$\begin{cases}y=-kx-1\\y=\frac{2x-4}{x}\end{cases}$ 可得 $-kx-1=\frac{2x-4}{x}$

即：$kx^2+x-4=0$，可得 $\Delta=1+16k>0$ 解得：$k>-\frac{1}{16}$

所以 $k\in(-\frac{1}{16},0)$

综上所述，k 的取值范围为：$(-\frac{1}{16},0)\cup(0,\frac{9}{16})$

故选 D

第Ⅱ卷

二、填空题

10.答案：$\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\mathrm{i}$

解析：原式$=\frac{(3+2\mathrm{i})(1+i)}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{3+2i^2+5i}{2}=\frac{1+5i}{2}$

11.答案：4

解析：$d=\frac{|5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$　　$|AB|=2\cdot\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}=4$

12.答案：-8

解析：$C_4^3(\sqrt[3]{x})^3(-\frac{2}{x})^1=4\times(-2)=-8$

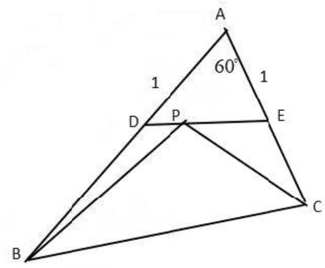
13.答案：$\frac{4}{9}$;2

解析：$C_3^2(\frac{2}{3})^2(\frac{1}{3})=\frac{4}{9}$　　$X\sim B(3,\frac{2}{3})$　　$E(X)=np=3\times\frac{2}{3}=2$

14.答案：4

解析：$\frac{1}{b^2}+\frac{4}{a^2}+ab\geq 2\sqrt{\frac{4}{a^2b^2}}+ab=\frac{4}{ab}+ab\geq 2\sqrt{4}=4$

当且仅当$\begin{cases}\frac{1}{b^2}=\frac{4}{a^2}\\ \frac{4}{ab}=ab\end{cases}$即：$a=2,b=1$时，等号成立；



15.答案：$1;-\frac{1}{16}$

解析：$\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DE}$,则$\overrightarrow{EP}=(1-\lambda)\overrightarrow{ED}$

$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DP}=-2\overrightarrow{AD}+\lambda(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD})$

$=-(2+\lambda)\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EP}=-\overrightarrow{AE}+(1-\lambda)(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE})=(\lambda-2)\overrightarrow{AE}+(1-\lambda)\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}=-(2+\lambda)(1-\lambda)\overrightarrow{AP}^2+\lambda(\lambda-2)\overrightarrow{AE}^2+[\lambda(1-\lambda)-(\lambda-2)(\lambda+2)]\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}$

$=-(-\lambda^2-\lambda+2)+\lambda^2-2\lambda+(-2\lambda^2+\lambda+4)\cdot\frac{1}{2}=\lambda^2-\frac{1}{2}\lambda$

$\lambda=\frac{1}{4}$时，$(\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP})_{\min}=-\frac{1}{16}$

三、解答题

16.

（Ⅰ）解：在ΔABC中，由$3(a-c)^2=3b^2-2ac$

整理得：$\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{2}{3}$

又由余弦定理可得：$\cos B=\dfrac{2}{3}$--4 分

（Ⅱ）（i）解：由（Ⅰ）可得$\sin B=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$及已知$5a=3b$，可得$\sin A=\dfrac{a\sin B}{b}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\sqrt{5}}{3}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ----8 分

（ii）解：由（i）可得$\cos 2A=1-2\sin^2 A=\dfrac{3}{5}$

由已知$5a=3b$，可得$a<b$，故有$A<B$

所以A为锐角，故由$\sin A=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，可得$\cos A=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

从而有$\sin 2A=2\sin A\cos A=\dfrac{4}{5}$

所以$\sin(2A+\dfrac{\pi}{6})=\sin 2A\cos\dfrac{\pi}{6}+\cos 2A\sin\dfrac{\pi}{6}$

$=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{4\sqrt{3}+3}{10}$--14 分

17.

依题意，可以建立以O为原点，分别以向量$\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OP}$的方向为$x$轴, y轴, z轴正方向的空间直角坐标系（如图）.

可得：$O(0,0,0),A(0,-2,0),B(1,0,0),C(0,2,0),D(-2,0,0),P(0,0,2),M(0,1,1)$

（Ⅰ）解：依题意可得$\overrightarrow{AD}=(-2,2,0),\overrightarrow{AM}=(0,3,1)$

设$\vec{n}=(x,y,z)$为平面ADM的法向量，则：

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0\end{cases}$ 即：$\begin{cases}-2x+2y=0\\ 3y+z=0\end{cases}$ 不妨令$y=1$，可得$\vec{n}=(1,1,-3)$

又$\overrightarrow{PB}=(1,0,-2)$，故$\cos\langle\overrightarrow{PB},\vec{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{PB}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{PB}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{7\sqrt{55}}{55}$

所以直线PB与平面ADM所成角的正弦值为$\dfrac{7\sqrt{55}}{55}$.------------------------------------7 分

（Ⅱ）由已知，可得$OB\perp$平面AMC，故$\overrightarrow{OB}$是平面AMC的一个法向量.

依题意可得$\overrightarrow{OB}=(1,0,0)$

因此有$\cos\langle\overrightarrow{OB},\vec{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{OB}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{OB}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{11}}{11}$,于是有$\sin\langle\overrightarrow{OB},\vec{n}\rangle=\dfrac{\sqrt{110}}{11}$

所以二面角$D-AM-C$的正弦值为$\dfrac{\sqrt{110}}{11}$.---------------------------------------11 分

（Ⅲ）解：设线段OQ的长为$h(0\le h\le 2)$，则点Q的坐标为$(0,0,h)$.

由已知可得点N的坐标为$(-1,0,1)$，进而可得$\overrightarrow{NQ}=(1,0,h-1)$.

由$NQ//$平面ADM，故$\overrightarrow{NQ}\perp\vec{n}$

所以$\overrightarrow{NQ}\cdot\vec{n}=0$，即$1-3(h-1)=0$，解得$h=\dfrac{4}{3}\in[0,2]$

所以线段OQ的长为$\dfrac{4}{3}$.--15 分

18.

（Ⅰ）解：设椭圆的焦距为$2c$，由已知有$\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{2}{3}$，又由$a^2=b^2+c^2$，可得$a^2=3b^2$.

由点$T(2\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{3}}{3})$在椭圆上，有$\dfrac{8}{a^2}+\dfrac{1}{3b^2}=1$，由此可得$a^2=9,b^2=3$

所以，椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1$.---5 分

（Ⅱ）解：设点A的坐标为(x_1,y_1)，点B的坐标为(x_2,y_2)

由方程组$\begin{cases}y=\sqrt{2}x+m\\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$消去$y$，整理可得：

$7x^2+6\sqrt{2}mx+3m^2-9=0$ ①

由求根公式可得：

$$x_1+x_2=-\frac{6\sqrt{2}m}{7} \qquad x_1x_2=-\frac{3m^2-9}{7} \qquad ②$$

由点 P 的坐标为 $(2\sqrt{2},0)$ 可得 $\overrightarrow{PA}=(x_1-2\sqrt{2},y_1),\overrightarrow{PB}=(x_2-2\sqrt{2},y_2)$

故：$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(x_1-2\sqrt{2})(x_2-2\sqrt{2})+y_1y_2=x_1x_2-2\sqrt{2}(x_1+x_2)+8+y_1y_2$ ③

又因为 $y_1=\sqrt{2}x_1+m$，$y_2=\sqrt{2}x_2+m$

所以 $y_1y_2=2x_1x_2+\sqrt{2}m(x_1+x_2)+m^2$，代入上式可得：

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=3x_1x_2+(\sqrt{2}m-2\sqrt{2})(x_1+x_2)+m^2+8$

由已知 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-1$ 以及①，可得：

$$\frac{3(3m^2-9)}{7}+\frac{(\sqrt{2}m-2\sqrt{2})(-6\sqrt{2}m)}{7}+m^2+8=-1$$

整理得：$m^2+6m+9=0$，解得 $m=-3$

这时，①的判别式 $\Delta=-12m^2+252=144>0$，故 $m=-3$ 满足题目条件

所以 $m=-3$.

19.

（Ⅰ）设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，则 $d=1$.

由 $a_3+a_4=a_7$ 可得 $a_1=d=1$.

由 $b_2\cdot b_4=b_5$ 可得 $b_1^2\cdot q^4=b_1\cdot q^4$，又因为 $b_1\neq0,q\neq0$

故 $b_1=1$.

再由 $a_4=4b_2-b_3$ 可得 $q^2-4q+4=0$，解得 $q=2$

所以 $a_n=n,b_n=2^{n-1}(n\in N^*)$.

（Ⅱ）解：$c_n=\begin{cases}2^{2m-2},n=3m-2\\2^{2m-1},n=3m-1\\m,n=3m\end{cases}$ 其中 $m\in N^*$

所以 $t_n=2^{2n-2}\cdot2^{2n-1}+2^{2n-1}\cdot n+n\cdot2^{2n}=2^{4n-3}+3n\cdot2^{2n-1}$

记$T_n=\sum_{t=1}^{n}t_k,A_n=\sum_{t=1}^{n}2^{4k-3},B_n=\sum_{t=1}^{n}k\cdot 2^{2k-1}$，则

$$A_n=\frac{2\times(1-2^{4n})}{1-2^4}=\frac{2(16^n-1)}{15}=\frac{2}{15}\times16^n-\frac{2}{15},$$

$$B_n=1\times2+2\times8+3\times32+...+n\times2^{2n-1} \quad ①$$

故有：

$$4B_n=1\times8+2\times32+...+n\times2^{2n+1} \quad ②$$

①—②，可得：

$$-3B_n=2+8+32+...+2^{2n-1}-n\times2^{2n+1}$$

$$=\frac{2(1-4^n)}{1-4}-n\times2^{2n+1}$$

$$=\frac{2-6n}{3}\times4^n-\frac{2}{3}$$

由此可得：$3B_n=\frac{6n-2}{3}\times4^n+\frac{2}{3}$

由$T_n=A_n+3B_n$，故可得$T_n=\frac{2}{15}\times16^n+\frac{6n-2}{3}\times4^n+\frac{8}{15}$ ----------------------------------15 分

20.

（Ⅰ）解：由已知可得函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，且$f'(x)=2x-2\ln x-2$.

令$h(x)=f'(x)$，则有$h'(x)=\frac{2(x-1)}{x}$，由$h'(x)=0$可得$x=1$.

可知当x变化时，$h'(x)$，$h(x)$的变化情况如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$h'(x)$	—	0	+
$h(x)$	↓	极小值	↑

所以$h(x)\ge h(1)=0$,即$f'(x)\ge0$，可得$f(x)$在区间$(0,+\infty)$单调递增-----------5 分

（Ⅱ）解：由已知可得函数$g(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，且$g'(x)=1-\frac{a}{x^2}-\frac{2\ln x}{x}$.

由已知，得$g'(x_0)=0$，即：

$$x_0^2-2x_0\ln x_0-a=0 \qquad ①$$

由$g(x_0)=2$可得：

$$x_0^2-x_0(\ln x_0)^2-2x_0+a=0 \qquad ②$$

联立①，②，消去a，可得：

$$2x_0-(\ln x_0)^2-2\ln x_0-2=0 \qquad ③$$

令$t(x)=2x-(\ln x)^2-2\ln x-2$，则$t'(x)=2-\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2(x-\ln x-1)}{x}$

由（Ⅰ）知$x-\ln x-1\geq 0$，故$t'(x)\geq 0$

所以$t(x)$在区间$(0,+\infty)$单调递增.

注意到$t(1)=0$，所以方程③有唯一解$x_0=1$，代入①，可得$a=1$

所以$x_0=1$，$a=1$

（Ⅲ）证明：由（Ⅰ）知$f(x)=x^2-2x\ln x$在区间$(0,+\infty)$单调递增

故当$x\in(1,+\infty)$时，$f(x)>f(1)=1$

所以$g'(x)=\dfrac{x^2-2x\ln x-1}{x^2}=\dfrac{f(x)-1}{x^2}>0$

可得$g(x)$在区间$(1,+\infty)$单调递增

因此，当$x>1$时，$g(x)>g(1)=2$，即$x+\dfrac{1}{x}-(\ln x)^2>2$

即：$(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}})^2>(\ln x)^2$

这时$\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}>0,\ln x>0$

故可得$\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}>\ln x$.

取$x=\dfrac{2k+1}{2k-1},k\in N^*$，可得：

$$\sqrt{\frac{2k+1}{2k-1}}-\sqrt{\frac{2k-1}{2k+1}}>\ln(2k+1)-\ln(2k-1)$$

而 $\sqrt{\dfrac{2k+1}{2k-1}}-\sqrt{\dfrac{2k-1}{2k+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{4k^2-1}}$，故：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{\sqrt{4k^2-1}}>\sum_{k=1}^{n}(\ln(2k+1)-\ln(2k-1))=\ln(2n+1)$$

所以，$\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{4k^2-1}}>\dfrac{1}{2}\ln(2n+1)$ $(n\in N^*)$--16 分