

高二期末联考

数学参考答案

一、选择题

1. A 【解析】由题意可得, $A = \{x | x^2 - 2x - 3 \leq 0, x \in \mathbf{Z}\} = \{x | -1 \leq x \leq 3, x \in \mathbf{Z}\} = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \left\{x \mid y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right\} = \{x | 4 - x^2 > 0\} = \{x | -2 < x < 2\}$, 所以 $A \cap B = \{-1, 0, 1\}$, 所以 $A \cap B$ 真子集的个数为 7. 故选 A.

2. C 【解析】因为 $e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$, 又 $(e^{\frac{\pi}{4}i})^{2024} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{2024} = \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2\right]^{1012} = i^{1012} = 1$, 所以 $(e^{\frac{\pi}{4}i})^{2024} + e^{\frac{\pi}{2}i} = 1 + i$. 故选 C.

3. B 【解析】因为 $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, 所以 $\alpha - \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$, 又 $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = m (m > 0)$, 所以 $\alpha - \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$, 从而 $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}$. 故选 B.

4. D 【解析】由 $|a+b| = |a-2b|$, 可得 $|a+b|^2 = |a-2b|^2$, 即 $a^2 + 2a \cdot b + b^2 = a^2 - 4a \cdot b + 4b^2$, 化简得 $2a \cdot b = b^2$, 所以 $2|a| \cdot |b| \cos \langle a, b \rangle = |b|^2$, 即 $|a| \cos \langle a, b \rangle = \frac{1}{2}$. 故选 D.

5. A 【解析】由于乙不能去 A 景点, 则乙可以去 B 或 C 景点, 共 2 种, 剩余的 3 人可以分成 1, 2 两组或 1, 1, 1 三组两种情况, ①分成 1, 2 两组, 和乙去不同的两个景点, 有 $C_3^1 C_2^2 \cdot A_2^2 = 6$ 种, ②分成 1, 1, 1 三组, 去三个景点且甲和乙不能同去一个景点, 有 $C_2^1 \cdot A_2^2 = 4$ 种, 所以不同的安排方法数为 $2 \times (6+4) = 20$ 种. 故选 A.

6. D 【解析】圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 的圆心 O 的坐标为

$(0, 0)$, 半径为 1, 当 $\angle APB$ 最大时, OP 垂直直线 l , 此时 $|OP| = 2$, $|PA| = |PB| = 2$, 从而四边形 $OAPB$ 的面积为 $S_{OAPB} = 2 \times \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1 = \sqrt{3}$, 设 $\angle AOP = \theta$, 则 $\angle AOB = 2\theta$, $S_{扇形OAB} = \frac{1}{2} \times 1^2 \times 2\theta = \theta$, 从而劣弧 $\widehat{AB}$ 及 PA, PB 所围成的平面图形的面积为 $S = \sqrt{3} - \theta$, 又因为 $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\theta = \frac{\pi}{3}$, 从而 $0 < S = \sqrt{3} - \theta = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} < 1$. 故选 D.

7. B 【解析】由题意, 数列 $1, 1, 3, 27, 729, \dots$ 为 $\{a_n\}$, 且为一阶等比数列, 设 $b_{n-1} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, 所以 $\{b_n\}$ 为等比数列, 其中 $b_1 = 1, b_2 = 3$, 公比为 $q = \frac{b_2}{b_1} = 3$, 所以 $b_n = 3^{n-1}$, 则 $a_n = b_{n-1} \cdot b_{n-2} \cdots b_1 \cdot a_1 = 3^{1+2+3+\dots+(n-2)} = 3^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$, $n \geq 2$, 所以 $\log_3 a_n = \log_3 3^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 2)$, $n \geq 2$, 因为 $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, 也适合上式, 所以 $\log_3 a_n = \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 2)$, 所以 $\sum_{n=1}^{10} \log_3 a_n = \log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \log_3 a_3 + \dots + \log_3 a_{10} = \frac{1}{2}[(1^2 + 2^2 + \dots + 10^2) - 3(1 + 2 + \dots + 10) + 2 \times 10] = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{6} \times 10 \times 11 \times 21\right) - 3 \times \frac{(1+10) \times 10}{2} + 2 \times 10 \right] = 120$. 故选 B.

8. B 【解析】构造函数 $g(x) = \sin x - \sqrt{1+2x} + 1, x \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$, 所以 $g'(x) = \cos x - \frac{1}{\sqrt{1+2x}}, x \in$

· 数学 ·

参考答案

$\left(0, \frac{1}{4}\right)$, 令 $g'(x) = \cos x - \frac{1}{\sqrt{1+2x}} = f(x)$, $x \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$, 则 $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(1+2x)^3}} - \sin x$, 因为当 $x \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ 时, $y = \frac{1}{\sqrt{(1+2x)^3}}$, $y = -\sin x$ 均单调递减, 所以 $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(1+2x)^3}} - \sin x$ 单调递减, 所以 $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(1+2x)^3}} - \sin x > f'\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^3} - \sin \frac{1}{4}$, 因为 $\sin \frac{1}{4} < \frac{1}{4}$, 所以 $\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^3} - \sin \frac{1}{4} > \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^3} - \frac{1}{4} > 0$, 所以 $g'(x) = \cos x - \frac{1}{\sqrt{1+2x}} = f(x)$ 单调递增, 又 $g'(0) = \cos 0 - \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 0$, 从而 $g(x)$ 在 $x \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ 单调递增, 所以 $g(x) > g(0) = 0$, 所以 $g(0.2) = \sin 0.2 - \sqrt{1+2 \times 0.2} + 1 > 0$, 从而得到 $b > a$. 又因为 $c - b = \ln 1.44 - \sin 0.2 = 2 \ln 1.2 - \sin 0.2$, 构造函数 $\varphi(x) = 2 \ln(1+x) - \sin x$, $x \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$, 所以 $\varphi'(x) = \frac{2}{x+1} - \cos x$, $x \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$, 令 $\varphi'(x) = \frac{2}{x+1} - \cos x = m(x)$, 则 $m'(x) = \sin x - \frac{2}{(x+1)^2}$, 因为当 $x \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ 时, $y = \sin x$, $y = -\frac{2}{(x+1)^2}$ 均单调递增, 所以 $m'(x) = \sin x - \frac{2}{(x+1)^2}$ 单调递增, 所以 $m'(x) = \sin x - \frac{2}{(x+1)^2} < m'\left(\frac{1}{4}\right) = \sin \frac{1}{4} - \frac{2}{\left(\frac{1}{4}+1\right)^2} < \frac{1}{4} - \frac{2}{\left(\frac{1}{4}+1\right)^2} = \frac{1}{4} - \frac{32}{25} < 0$, 所以 $\varphi'(x)$ 在 $x \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ 单调递减, 所以 $\varphi'(x) > \varphi'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{8}{5} - \cos \frac{1}{4} > 0$, 所以 $\varphi(x) =$

$2 \ln(1+x) - \sin x$, $x \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ 单调递增, 从而 $\varphi(x) > \varphi(0) = 0$, 所以 $\varphi(0.2) = 2 \ln(1.2) - \sin 0.2 > 0$, 即 $c > b$. 综上, 有 $c > b > a$. 故选 B.

二、选择题

9. AB 【解析】因为 $a_{n+1} = a_n + 1$, 所以数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 公差为 1, 因为 $a_1 = -2$, 所以 $a_n = -2 + 1 \times (n-1) = n-3$, 所以 $a_{2023} = 2023-3 = 2020$, 故 A 正确; 因为 $a_{n+1} - a_n = 1 > 0$, 所以 $\{a_n\}$ 是递增数列, 故 B 正确; 因为 $a_1 = -2 < 0$, $a_2 = -1 < 0$, $a_3 = 0$, 所以数列 $\{S_n\}$ 中的最小项为 S_2 或 S_3 , 故 C 错误; 当 $m=1$ 时, $S_1 = -2$, $S_2 = -3$, $S_3 = -3$, 显然不是等差数列, 故 D 错误. 故选 AB.

10. ABD 【解析】因为 $f\left(-\frac{5\pi}{12} - x\right) = f\left(-\frac{5\pi}{12} + x\right)$, 所以 $f(x)$ 的函数图象关于直线 $x = -\frac{5\pi}{12}$ 成轴对称, 则 $-\frac{5\pi}{12}\omega + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 得 $\omega = -\frac{2}{5} - \frac{12}{5}k, k \in \mathbf{Z}$, 又因为 $1 < \omega < 3$, 所以 $\omega = 2$, 故 A 正确; 所以 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, 所以 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, 故 B 正确; 令 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $-\frac{5\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 当 $k=0$ 时, $\left[-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right]$ 为单调递增区间, 但在区间 $\left[-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right]$ 有增有减, 故 C 错误; $f(2023\pi) = \sin\left(2 \times 2023\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 故 D 正确. 故选 ABD.

11. BD 【解析】因为渐近线方程为 $3x \pm y = 0$, 所以可设双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 为 $E: x^2 - \frac{y^2}{9} =$

• 2 •

参考答案

• 数学 •

$=m$, 又因为点 $R(4, 6\sqrt{3})$ 在双曲线 E 上, 所以 $m=4$, 从而双曲线 $E: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{36} = 1$, 所以离心率为 $e = \sqrt{10}$, 故 A 错误; 由题可知右焦点为 $F_2(2\sqrt{10}, 0)$, 所以点 $F_2(2\sqrt{10}, 0)$ 到渐近线 $3x - y = 0$ 的距离为 $d = \frac{|3 \times 2\sqrt{10}|}{\sqrt{9+1}} = 6$, 故 B 正确; 若 $l \perp x$ 轴, 则 $|AB| = 2 \times \frac{36}{2} = 36 > 30$, 所以与右支不可能有两个交点, 若 l 与 x 轴不垂直, 与 C 的左、右支交于 A, B 两点, 因为 $|AB| = 30 > 2a = 4$, 所以存在两条直线分别交左右两支各一点, 综上可得: 满足条件的直线有 2 条, 故 C 错误; 设 $M(x_1, y_1), P(x_2, y_2), Q(x_3, y_3)$, 则 $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}$, 因为 P, M 在双曲线 E 上, 所以 $\frac{x_1^2}{4} - \frac{y_1^2}{36} = 1$ ①, $\frac{x_2^2}{4} - \frac{y_2^2}{36} = 1$ ②, ①-②并整理得 $\frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} \cdot \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 9$, 因为 $k_{MP} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, k_{OQ} = \frac{y_3}{x_3} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}$, 所以 $k_{OQ} \times k_{PM} = 9$, 故 D 正确. 故选 BD.

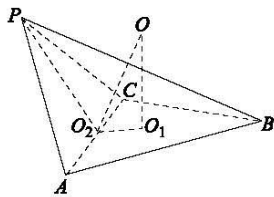
12. ABD 【解析】设实际比赛局数为 X , 则 X 的可能取值为 3, 4, 5, 所以 $P(X=3) = p^3 + (1-p)^3$, $P(X=4) = C_3^1 p^3 (1-p) + C_3^1 p (1-p)^3$, $P(X=5) = C_4^2 p^2 (1-p)^2$, 因此打满五局的概率为 $C_4^2 p^2 (1-p)^2$, 故 A 正确; 故 $f(p) = 3[p^3 + (1-p)^3] + 4[C_3^1 p^3 (1-p) + C_3^1 p (1-p)^3] + 5 \times C_4^2 p^2 (1-p)^2 = 6p^4 - 12p^3 + 3p^2 + 3p + 3$, 常数项为 3, 故 B 正确; 由 $f'(p) = 24p^3 - 36p^2 + 6p + 3 = 3(2p-1)(4p^2 - 4p - 1)$, $\because 0 \leq p \leq 1$, 所以 $4p^2 - 4p - 1 = (2p-1)^2 - 2 < 0$, $\therefore$ 令 $f'(p) > 0$, 则 $0 \leq p < \frac{1}{2}$; 令 $f'(p) < 0$, 则 $\frac{1}{2} < p \leq 1$, 则函数 $f(p)$ 在

$(\frac{1}{2}, 1]$ 上单调递减, 故 C 错误; 又 $f(\frac{1}{2}) = 6 \times \frac{1}{16} - 12 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 3 = \frac{33}{8}$, 故 D 正确. 故选 ABD.

三、填空题

13. 6.5 【解析】依题意这 10 个数据从小到大排列为 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 又 $10 \times 30\% = 3$, 所以这组数据的 30% 分位数是第 3 与第 4 个数的平均数 6.5. 故答案为 6.5.

14. $\frac{52}{9}\pi$ 【解析】从第一步活动中可知 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形, 第二步活动中可知三棱锥 $P-ABC$ 外接球的球心是过底面 $\triangle ABC$ 外心的平面 ABC 的垂线, 与过 $\triangle PAC$ 外心的平面 PAC 的垂线的交点,



$\triangle ABC$ 的外心 O_1 为 $\triangle ABC$ 的中心, $\triangle PAC$ 的外心 O_2 为 AC 的中点, 三棱锥 $P-ABC$ 外接球的球心为 O , 则 $\angle PO_2 O_1 = 120^\circ, O_1 O_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}, \angle PO_2 O = 90^\circ$, 所以 $\angle OO_2 O_1 = 30^\circ$, 即 $\cos \angle OO_2 O_1 = \frac{O_2 O_1}{OO_2} \Rightarrow \cos 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{OO_2}$, 所以 $OO_2 = \frac{2}{3}$, 设外接球的半径为 R , 所以 $R^2 = OO_2^2 + AO_2^2 = \frac{4}{9} + 1 = \frac{13}{9}$, 所以外接球的表面积为 $4\pi R^2 = \frac{52\pi}{9}$. 故答案为 $\frac{52}{9}\pi$.

15. $[e + \frac{1}{e}, +\infty)$ 【解析】由函数 $g(x) = xe^x$, 得

· 数学 ·

参考答案

$g'(x) = (x+1)e^x$, 当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减, 当 $x \in (-1, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增, 所以 $g(x) \geq g(-1) = -\frac{1}{e}$, 又当 $x < 0$ 时, $g(x) < 0$, $g(1) = e$, 所以当 $x \in (-\infty, 1]$, $-\frac{1}{e} \leq g(x) \leq e$, 即函数 $g(x)$ 的值域为 $B = [-\frac{1}{e}, e]$, 又由函数 $f(x) = ax + e (a > 0)$ 在区间 $[-1, 2]$ 上单调递增, 可得 $-a + e \leq f(x) \leq 2a + e$, 即函数 $f(x)$ 的值域为 $A = [-a + e, 2a + e]$, 又由 $\forall x_2 \in (-\infty, 1], \exists x_1 \in [-1, 2]$, 使 $f(x_1) = g(x_2)$ 成立, 即 $B \subseteq A$, 则满足

$$\begin{cases} e - a \leq -\frac{1}{e} \\ 2a + e \geq e \end{cases}, \text{解得}$$

$a \geq e + \frac{1}{e}$, 即实数 a 的取值范围是 $[e + \frac{1}{e}, +\infty)$.

故答案为 $[e + \frac{1}{e}, +\infty)$.

16. $(\frac{16\sqrt{3}}{9}, \frac{16\sqrt{3}}{9} + 2)$ 【解析】由 $x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$

$= x(x+2)(x-2) = 0 (x \leq 0)$, 解得 $x = 0$ 或

$x = -2$; 由 $-\ln x = 0 (x > 0)$, 解得 $x = 1$. 因为

$F(x) = f(f(x) - t) = 0$, 所以 $f(x) - t = 0$ 或 $f(x) -$

$t = 1$ 或 $f(x) - t = -2$, 即 $f(x) = t$ 或 $f(x) = t + 1$

或 $f(x) = t - 2$, 因为 $F(x) = f(f(x) - t)$ 有 5 个零

点, 所以函数 $f(x)$ 的图象与三条直线 $y = t, y = t +$

$1, y = t - 2$ 共有 5 个交点. 因为函数 $y = -\ln x$ 的

图象与三条直线 $y = t, y = t + 1, y = t - 2$ 共有 3 个交

点, 所以 $f(x) = x^3 - 4x (x \leq 0)$ 的图象与三条直线共

有 2 个交点, 当 $x \leq 0$ 时, $f'(x) = 3x^2 - 4 =$

$$3\left(x + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(x - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right), \text{所以 } x \in \left(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

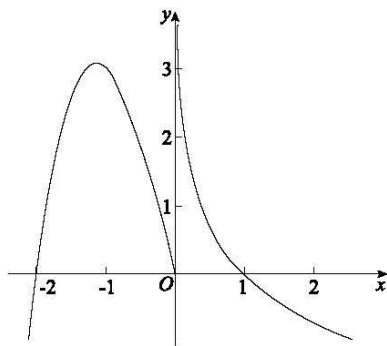
时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; $x \in \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ 时,

$f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 所以 $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时,

$f(x)$ 取得极大值也即是最大值, $f\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) =$

$$\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3 - 4 \times \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{16\sqrt{3}}{9}, f(0) = 0, \text{结合}$$

$f(x)$ 的图象,



$$\text{可知 } \begin{cases} t > \frac{16\sqrt{3}}{9} \\ 0 < t - 2 < \frac{16\sqrt{3}}{9} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} t = \frac{16\sqrt{3}}{9} \\ t - 2 < 0 \end{cases}, \text{解得 } \frac{16\sqrt{3}}{9} < t < \frac{16\sqrt{3}}{9} + 2.$$

故答案为 $(\frac{16\sqrt{3}}{9}, \frac{16\sqrt{3}}{9} + 2)$.

四、解答题

17. 解: (1) 因为 $2a \cos B = a^2 - b^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}bc$,

$$\text{由余弦定理得 } 2ac \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = a^2 - b^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}bc,$$

$$\text{所以 } c = \frac{\sqrt{3}}{2}b,$$

又因为 $b = 2\sqrt{3}$, 所以 $c = 3$. (2 分)

又 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{9}{2}$, 所以 $\frac{1}{2}bc \sin A = \frac{9}{2}$, 即 $\frac{1}{2} \times$

$$2\sqrt{3} \times 3 \sin A = \frac{9}{2},$$

所以 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 又因为 $0 < A < \frac{\pi}{2}$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$.

(5 分)

参考答案

• 数学 •

(2)由(1)及余弦定理可知 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos A =$
 $12 + 9 - 2 \times 2\sqrt{3} \times 3\cos \frac{\pi}{3},$

即 $a^2 = 21 - 6\sqrt{3}$, 所以 $a = \sqrt{21 - 6\sqrt{3}} < b = 2\sqrt{3},$
(7分)

又若 C 为圆心, r 为半径的圆与边 AB 相切,

设切点为 D , 则 $\sin A = \frac{CD}{AC}$, 得 $CD = AC \sin A = 2\sqrt{3}$
 $\times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3,$

所以要使以 C 为圆心, r 为半径的圆与边 AB 有两
个交点, 必须满足 $3 < r \leq \sqrt{21 - 6\sqrt{3}},$

所以 r 的取值范围为 $(3, \sqrt{21 - 6\sqrt{3}}].$ (10分)

18. 解: (1)选①: $\because a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2^{n+1} - 2,$

$n \geq 2$ 时, $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} = 2^n - 2,$ (2分)

$\therefore$ 两式相减得 $a_n = 2^n$, 即 $a_n = 2^n (n \geq 2),$ (4分)

又当 $n=1$ 时, $a_1 = 2$, 满足上式,

$\therefore a_n = 2^n.$ (5分)

选②: $\because a_1 a_2 a_3 \dots a_n = 2^{\frac{n^2+n}{2}},$

$n \geq 2$ 时, $a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1} = 2^{\frac{(n-1)^2+(n-1)}{2}} = 2^{\frac{n^2-n}{2}},$ (2分)

$\therefore$ 两式相除得 $a_n = 2^n (n \geq 2),$ (4分)

当 $n=1$ 时, $a_1 = 2$, 满足上式,

$\therefore a_n = 2^n.$ (5分)

(2)由(1)可知, $n \in [2^{k-1}, 2^k), k \in \mathbf{N}^*, [2^{k-1}, 2^k)$ 上
所有整数依次为 $2^{k-1}, 2^{k-1} + 1, 2^{k-1} + 2, \dots, 2^{k-1} +$
 $(2^{k-1} - 1),$ (8分)

它们构成首项为 2^{k-1} , 公差为 1 的等差数列, 且项数
为 $2^{k-1},$

所以 $T = 2^{k-1} + (2^{k-1} + 1) + (2^{k-1} + 2) + \dots + [2^{k-1}$
 $+ (2^{k-1} - 1)]$

$= 2^{k-1} \cdot 2^{k-1} + \frac{(2^{k-1} - 1)2^{k-1}}{2} = 3 \times 2^{2k-3} - 2^{k-2}.$

(12分)

19. 证明: (1)因为 $ABCD$ 为菱形且 $\angle BAD = 60^\circ,$

所以 $\triangle BCD$ 为等边三角形, 又因为点 E 为 BC
中点,

故 $DE \perp BC.$ (2分)

在正三角形 PBC 中, $PE \perp BC, DE \cap PE = E, DE,$
 $PE \subset$ 平面 $DEP,$

所以 $BC \perp$ 平面 $DEP,$

因为 $PF \subset$ 平面 $DEP,$

所以 $BC \perp PF.$ (4分)

(2)由 $PE \perp BC, DE \perp BC$, 可得 $\angle DEP$ 就是二面角
 $A-BC-P$ 的平面角, 所以 $\angle DEP = 60^\circ,$ (5分)

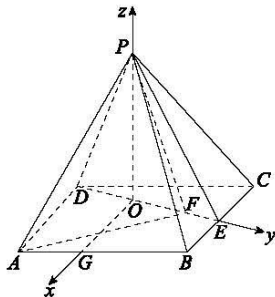
在 $\triangle DEP$ 中, $PE = DE = \sqrt{3}$, 所以 $\triangle DEP$ 为边长为
 $\sqrt{3}$ 的等边三角形, 取 DE 中点 O , 则 $PO \perp DE$, 又由

(1)可知, 平面 $DEP \perp$ 底面 $ABCD$, 平面 $DEP \cap$ 底
面 $ABCD = DE,$

所以 $PO \perp$ 底面 $ABCD$, 过点 O 作 BC 的平行线交
 AB 于点 G ,

则 $OG \perp DE$, 所以 OG, OE, OP 两两相互垂直,

所以以 O 为坐标原点, 以 $\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OP}$ 所在的方向分
别为 x, y, z 轴的正方向, 建立如图所示的空间直角
坐标系 $O-xyz,$ (6分)



· 数学 ·

参考答案

在 $\triangle POE$ 中, $OE = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $OP = \frac{3}{2}$,

可得 $A(2, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, $B(1, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, $E(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$,

$P(0, 0, \frac{3}{2})$, $D(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$,

因为 $3\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{DF}$, 所以 $F(0, \frac{\sqrt{3}}{4}, 0)$,

所以 $\overrightarrow{AF} = (-2, \frac{3\sqrt{3}}{4}, 0)$, $\overrightarrow{PF} = (0, \frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{2})$,

$\overrightarrow{PB} = (1, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2})$, (8分)

设 $n = (x, y, z)$ 为平面 PAF 的一个法向量, 则

$$\begin{cases} -2x + \frac{3\sqrt{3}}{4}y = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{3}{2}z = 0 \end{cases},$$

令 $y = 4$, 则 $x = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $z = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 得 $n =$

$(\frac{3\sqrt{3}}{2}, 4, \frac{2\sqrt{3}}{3})$, (10分)

设直线 PB 与平面 PAF 所成角为 θ ,

$$\text{则有 } \sin \theta = |\cos \langle n, \overrightarrow{PB} \rangle| = \frac{|n \cdot \overrightarrow{PB}|}{|n| \cdot |\overrightarrow{PB}|} =$$

$$\frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{2 \times \frac{17}{2\sqrt{3}}} = \frac{15}{34} < \frac{1}{2}, \text{ 所以 } \theta < \frac{\pi}{6},$$

故直线 PB 与平面 PAF 所成的角小于 $\frac{\pi}{6}$ 得证.

(12分)

20. 解: (1) 若选择方案一, 由条件可知 X 可能的取值为

3, 4, 5, 6,

$$P(X=3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}, P(X=4) = \frac{1}{2} \times$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{37}{72},$$

$$P(X=5) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$\times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}, P(X=6) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}, \quad (4分)$$

$\therefore X$ 的分布列为:

X	3	4	5	6
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{37}{72}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{36}$

(5分)

$$E(X) = 3 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{37}{72} + 5 \times \frac{1}{3} + 6 \times \frac{1}{36} = \frac{307}{72} \approx$$

4.26 百元. (写成分数形式亦可给分) (6分)

(2) 对于方案二, 由条件可得 Y 可能的取值为 3, 4,

5, 6,

$$P(Y=3) = \frac{C_3^3}{C_6^3} = \frac{1}{20}, P(Y=4) = \frac{C_3^1 C_3^2}{C_6^3} = \frac{9}{20},$$

$$P(Y=5) = \frac{C_3^1 C_3^2}{C_6^3} = \frac{9}{20}, P(Y=6) = \frac{C_3^3}{C_6^3} = \frac{1}{20},$$

(10分)

$$\therefore Y \text{ 的期望值 } E(Y) = 3 \times \frac{1}{20} + 4 \times \frac{9}{20} + 5 \times \frac{9}{20} + 6$$

$$\times \frac{1}{20} = \frac{9}{2} = 4.5 \text{ 百元.}$$

$\because E(Y) > E(X)$, 所以参与者选择方案二获得奖金数额的数学期望值会更高.

所以作为参与者, 应该选择方案二. (12分)

21. 解: (1) 由题可知焦点的坐标为 $(0, \frac{p}{2})$,

$$\text{所以由抛物线的定义可知 } |MF| = 1 + \frac{p}{2} = 2,$$

(2分)

$$\text{即 } p=2, \text{ 所以抛物线 } C \text{ 的方程为 } x^2=4y. \quad (4分)$$

(2) 易知直线 AB 的斜率存在且不为零, 设直线 AB

的方程为 $y=k(x+1) (k \neq 0)$,

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,



参考答案

• 数学 •

$$\text{由} \begin{cases} y=k(x+1) \\ x^2=4y \end{cases}, \text{得 } x^2-4kx-4k=0, \quad (5 \text{ 分})$$

$$\text{则 } \Delta=16k^2+16k>0, \text{ 即 } k>0 \text{ 或 } k<-1, x_1x_2=-4k. \quad (6 \text{ 分})$$

$$\text{易知直线 } AQ \text{ 的方程为 } y=\frac{y_1+2}{x_1}x-2,$$

$$\text{由} \begin{cases} y=\frac{y_1+2}{x_1}x-2 \\ x^2=4y \end{cases}, \text{得 } x^2-\frac{4(y_1+2)}{x_1}x+8=0, \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{设 } E(x_3, y_3), \text{ 则 } x_1x_3=8, \text{ 得 } x_3=\frac{8}{x_1},$$

$$\text{设 } F(x_4, y_4), \text{ 同理可得 } x_4=\frac{8}{x_2}, \quad (9 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \frac{S_{\triangle QAB}}{S_{\triangle QEF}} &= \frac{\frac{1}{2}|QA| \cdot |QB| \sin \angle AQB}{\frac{1}{2}|QE| \cdot |QF| \sin \angle AQB} \\ &= \frac{|QA| \cdot |QB|}{|QE| \cdot |QF|} = \frac{y_1+2}{y_3+2} \cdot \frac{y_2+2}{y_4+2} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{4}x_1^2+2\right)\left(\frac{1}{4}x_2^2+2\right)}{\left(\frac{1}{4}x_3^2+2\right)\left(\frac{1}{4}x_4^2+2\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{16}(x_1^2+8)(x_2^2+8)}{16\left(\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{8}\right) \cdot 16\left(\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{8}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{16}(x_1^2+8)(x_2^2+8)}{\frac{2(x_1^2+8)2(x_2^2+8)}{x_1^2x_2^2}} \\ &= \frac{x_1^2x_2^2}{64} = \frac{16k^2}{64} = \frac{k^2}{4} = \frac{1}{3}, \end{aligned} \quad (11 \text{ 分})$$

$$\text{得 } k^2=\frac{4}{3}, k=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\begin{aligned} \text{故直线 } AB \text{ 的方程为 } y &= \frac{2\sqrt{3}}{3}(x+1) \text{ 或 } y = \\ &= -\frac{2\sqrt{3}}{3}(x+1). \end{aligned} \quad (12 \text{ 分})$$

$$22. \text{解: (1) 令 } f(x)=0, \text{ 即得 } ae^x-x^2+3=0,$$

$$\text{即 } a=\frac{x^2-3}{e^x} \text{ 方程有三个零点, 即直线 } y=a \text{ 与曲线}$$

$$g(x)=\frac{x^2-3}{e^x} \text{ 有三个不同的交点.}$$

$$g'(x) = \frac{2x-x^2+3}{e^x} = -\frac{x^2-2x-3}{e^x} = -\frac{(x+1)(x-3)}{e^x},$$

所以当 $x \in (-\infty, -1)$ 或 $x \in (3, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减;

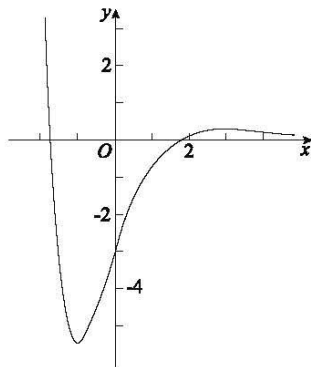
当 $x \in (-1, 3)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增.

所以当 $x=-1$ 时, $g(x)$ 有极小值为 $g(x)=-2e$, (3 分)

当 $x=3$ 时, $g(x)$ 有极大值为 $g(x)=\frac{6}{e^3}$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow 0$,

且当 $|x| \geq \sqrt{3}$ 时, $g(x) > 0$,

所以作出函数 $g(x)=\frac{x^2-3}{e^x}$ 的图象如图所示,



所以数形结合可知 $0 < a < \frac{6}{e^3}$. (5 分)

(2) 因为 $\varphi(x) = -x^2 + 2x + 4 - f(x) = 2x + 1 - ae^x$,

当 $a \leq 0$ 时, $\varphi(x)$ 单调递增, 不可能有两个零点, 所以 $a > 0$, 此时 $\varphi'(x) = 2 - ae^x$,



• 数学 •

参考答案

令 $\varphi'(x)=0$, 得 $x=\ln \frac{2}{a}$,

所以当 $x \in (-\infty, \ln \frac{2}{a})$ 时, $\varphi'(x) > 0$; 当 $x \in$

$(\ln \frac{2}{a}, +\infty)$ 时, $\varphi'(x) < 0$.

故 $\varphi(x)$ 在区间 $(-\infty, \ln \frac{2}{a})$ 上单调递增, 在区间

$(\ln \frac{2}{a}, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $\varphi(\ln \frac{2}{a}) = 2\ln \frac{2}{a} + 1 - 2 = 2\ln \frac{2}{a} - 1$, (7 分)

若 $\varphi(x)$ 有两个零点, 则 $\varphi(\ln \frac{2}{a}) > 0$, 得 $\ln \frac{2}{a} >$

$\frac{1}{2}$, 所以 $0 < a < \frac{2\sqrt{e}}{e}$,

当 $0 < a < \frac{2\sqrt{e}}{e}$ 时, $\varphi(\ln \frac{2}{a}) > 0$, $\varphi(-\frac{1}{2}) = -ae^{-\frac{1}{2}}$

< 0 , $\ln \frac{2}{a} > \frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$,

故存在 $x_1 \in (-\frac{1}{2}, \ln \frac{2}{a})$, 使得 $f(x_1) = 0$.

又当 x 趋向于 $+\infty$ 时, $\varphi(x)$ 趋向于 $-\infty$,

故存在 $x_2 \in (\ln \frac{2}{a}, +\infty)$, 使得 $f(x_2) = 0$,

故 $0 < a < \frac{2\sqrt{e}}{e}$. (8 分)

所以由题可得 $\begin{cases} 2x_1+1=ae^{x_1} \\ 2x_2+1=ae^{x_2} \end{cases}$, 得 $\frac{2x_2+1}{2x_1+1} = e^{x_2-x_1}$,

即 $\sqrt{\frac{2x_2+1}{2x_1+1}} = e^{\frac{x_2-x_1}{2}}$;

要证 $\sqrt{\frac{2x_2+1}{2x_1+1}} < \frac{e^{x_2}-e^{-x_1}}{x_2+x_1}$, 只需证 $e^{\frac{x_2-x_1}{2}}$

$< \frac{e^{x_2}-e^{-x_1}}{x_2+x_1}$,

两边同乘以 e^{x_1} , 得 $e^{\frac{x_2+x_1}{2}} < \frac{e^{x_2+x_1}-1}{x_2+x_1}$.

因为 $x_1 > -\frac{1}{2}$, $x_2 > \ln \frac{2}{a} > \frac{1}{2}$, 所以 $x_1+x_2 > 0$.

令 $t = \frac{x_1+x_2}{2} > 0$, 即证 $e^t < \frac{e^{2t}-1}{2t}$,

即证 $e^{2t}-2te^t-1 > 0$. (10 分)

令 $h(t) = e^{2t}-2te^t-1 (t > 0)$,

$h'(t) = 2e^{2t}-2(t+1)e^t = 2e^t(e^t-t-1)$.

令 $H(t) = e^t-t-1 (t > 0)$, $H'(t) = e^t-1 > 0$,

故 $H(t)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

故 $H(t) > H(0) = 0$, 因此 $h'(t) > 0$, 所以 $h(t)$ 在

区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

故 $h(t) > h(0) = 0$, 因此原不等式成立. (12 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线