2023年普通高等学校招生考试模拟试题一（衡水密卷）
数学

本试卷共4页,22题。全卷满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：

1.答题前，先将自己的姓名、考号等填写在答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2.选择题的作答;选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3.填空题和解答题的作答：用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4.考试结束后,请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题;本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1.若$(\mathrm{i}-1)(z-2\mathrm{i})=2+\mathrm{i}$，则$\overline{z}=$

A. $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　　B. $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　　C. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　　D. $-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

2.已知集合$A=\left\{x\middle|\ y=\ln\left(3x-x^2+4\right)\right\},B=\left\{y\middle|\ y=x^4+t\right\}$，若$A\cap B=A$，则实数$t$的取值范围是

A. $(-\infty,-1]$　　B. $(-\infty,1]$　　C. $(-\infty,-1)$　　D. $(-\infty,1)$

3.已知平面向量$\mathbf{a},\mathbf{b}$满足$|\mathbf{a}|=2,|\mathbf{b}|=1,\mathbf{a}-\mathbf{b}=(\sqrt{3},-2)$，则$|2\mathbf{a}-\mathbf{b}|=$

A. $\sqrt{15}$　　B. $4\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{21}$　　D. 33

4.分形几何学是数学家伯努瓦-曼德尔布罗在20世纪70年代创立的一门新的数学学科,它的创立为解决众多传统科学领域的难题提供了全新的思路.按照如图1所示的分形规律可得如图2所示的一个树形图.记图2中第n行黑圈的个数为a_n，若$a_n=144$，则$n=$

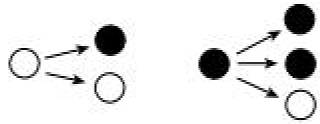


图1

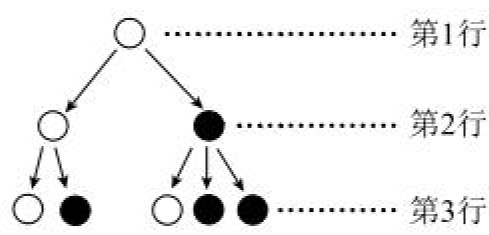


图2

A. 5　　　　B. 6　　　　C. 7　　　　D. 8

5. 已知直线 $l: y=3x$ 与圆 $C: x^2+y^2-4y=0$ 相交于 A,B 两点, 则 $\triangle ABC$ 的面积为

A. $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　　B. $\dfrac{6}{5}$　　C. $\dfrac{2\sqrt{38}}{5}$　　D. 5

6. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 $3, M, N$ 分别为棱 AA_1, CC_1 的中点, 点 Q 是棱 A_1D_1 上靠近点 D_1 的三等分点, 则平面 MNQ 截该正方体所得截面的面积为

A. $\sqrt{34}$　　B. $2\sqrt{34}$　　C. 10　　D. 12

7. 某大型超市设立了“助农促销”专区, 销售各种农产品, 积极解决农民农副产品滞销问题. 为加大农产品销量, 该超市进行了有奖促销活动, 凡购买专区的农产品每满 100 元的顾客均可参加该活动, 活动规则如下: 将某空地划分为(1)(2)(3)(4)四个区域, 顾客将一皮球投进区域(1)或者(2)一次, 或者投进区域(3)两次, 或者投进区域(4)三次, 便视为中奖, 投球停止, 且投球次数不超过四次. 已知顾客小王每次都能将皮球投进这块空地, 他投进区域(1)与(2)的概率均为 $p(0<p<1)$, 投进区域(3)的概率是投进区域(1)的概率的 2 倍, 且每次投皮球相互独立. 小王第二次投完皮球首次中奖的概率记为 P_1, 第四次投完皮球首次中奖的概率记为 P_2, 若 $P_1>P_2$, 则 p 的取值范围为

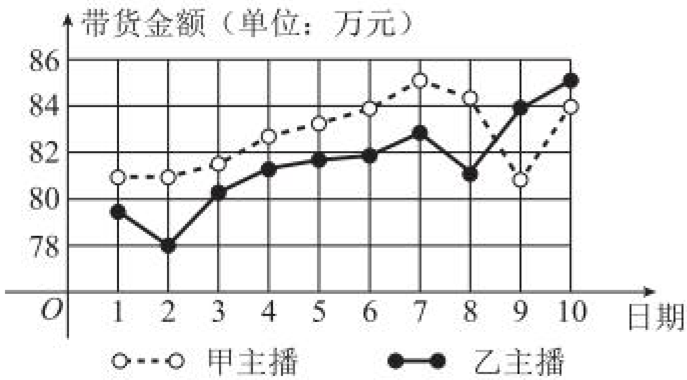
A. $\left(0,\dfrac{3-\sqrt{3}}{12}\right)$　　B. $\left(0,\dfrac{3+\sqrt{3}}{12}\right)$　　C. $\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{12},\dfrac{1}{4}\right)$　　D. $\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{12},\dfrac{3+\sqrt{3}}{12}\right)$

8. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点为 F, 双曲线 C 上的两点 A,B 关于原点 O 对称(其中点 A 在双曲线 C 的右支上), 且 $|OA|=|OF|$, 双曲线 C 上的点 D 满足 $\overrightarrow{DF}=\dfrac{5}{2}\overrightarrow{FB}$, 则双曲线 C 的离心率为

A. $\dfrac{\sqrt{109}}{7}$　　B. $\dfrac{\sqrt{59}}{7}$　　C. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　　D. $\dfrac{109}{49}$

二、选择题;本题共4小题，每小题5分,共20分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得5分,部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. 2022 年秋, 我国南方某地脐橙大丰收，甲、乙两名网红主播为帮助该地销售脐橙，开启了连续10天针对该地脐橙的直播带货专场, 下面统计图是甲、乙两名主播这10天的带货数据：则下列说法中正确的有：



A. 甲主播10天带货总金额超过乙主播10天带货总金额

B. 乙主播10天带货金额的中位数低于82万元

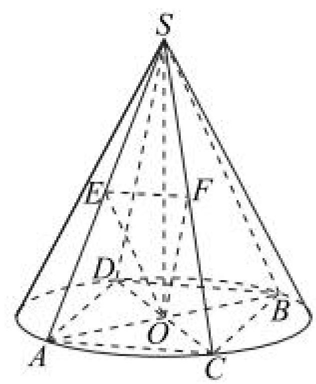
C. 甲主播10天带货金额的极差小于乙主播 10天带货金额的极差

D. 甲主播前7天带货金额的标准差大于乙主播前7天带货金额的标准差

10. 已知 $\frac{c^5}{b}<\frac{c^5}{a}<0$，则下列不等式一定成立的有

A. $\frac{b}{a}>1$　　B. $\frac{a-b}{c}<0$　　C. $\frac{a}{b}<\frac{a+c^2}{b+c^2}$　　D. $bc<ba$

11. 如图，已知圆锥的顶点为 S，底面 $ACBD$ 的两条对角线恰好为圆 O 的两条直径，E,F 分别为 SA,SC 的中点，且 $SA=AC=AD$，则下列说法中正确的有



A. $SD//$平面 OEF

B. 平面 $OEF//$平面 SBD

C. $OE\perp SA$

D. 直线 EF 与 SD 所成的角为 45°

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-2x^2+2, x\le 1,\\ 2^x-2, x>1,\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $[f(f(x))]^2=(m+2)f(f(x))-2m$ 至少有 8 个不等的实根，则实数 m 的取值不可能为

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 2022 年卡塔尔世界杯期间，3 男 3 女共 6 位球迷赛后在比赛场地站成一排合影留念，则男、女球迷相间排列的概率为__________.

14. 勾股数是指可以构成一个直角三角形三边的一组正整数，若椭圆 C 的一个焦点把长轴分成长度分别为 m,n 的两段，且 $m,n,10$ 恰好为一组勾股数，则 C 的一个标准方程为________．（写出满足条件的一个即可）

15. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|\quad\frac{\pi}{2}\right)$，若 $f\left(-\frac{\pi}{12}\right)=0$，对于任意的 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=f\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$，且 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{5\pi}{72},\frac{\pi}{9}\right)$ 上单调，则 ω 的最大值为________．

16. 已知函数 $f(x)=2023e^{x}-ax^{2}-1(a\in R)$ 有两个极值点 x_1,x_2，且 $x_2\geq 2x_1$，则实数 a 的取值范围为________．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_{n+1}-2=S_n+a_n$，_______．

请在（1）$a_2+a_9=20$；（2）a_1,a_2,a_5 成等比数列；（3）$S_5=a_2+a_4+15$，这三个条件中任选一个补充在上面题干中，并解答下列问题．

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $b_n=a_n-10$，求数列 $\{|b_n|\}$ 的前 n 项和 T_n．

注：如果选择多个条件分别解答，则按第一个解答计分．

18.（本小题满分 12 分）

沙漠治理能使沙漠变成一片适宜居住的地方，不让沙漠扩大化．近 30 年来，我国高度重视防沙治沙工作，相继采取了一系列重大举措加快防沙治沙步伐，推动我国防沙治沙事业．我国某沙漠地区采取防风固沙、植树造林等多措并举的方式，让沙漠变绿洲，通过统计发现，该地区沙漠面积 y（单位：公顷）与时间 x（单位：年）近似地符合 $y=\frac{b}{x}+a(a,b\in\mathbf{R})$ 回归方程模型（以 2016 年作为初始年份，x 的值为 1），计算 2016 年至 2022 年近 7 年来的 y 与 x 的相关数据，得 $\overline{x}=4,\sum_{i=1}^{7}x_iy_i=7212$，$\sum_{i=1}^{7}t_iy_i=1586,\overline{t}\approx 0.37,\sum_{i=1}^{7}t_i^2-7\overline{t}^2\approx 0.55$（其中 $t_i=\frac{1}{x_i},x_i$ 表示第 i 年，$1\quad i\quad 7,i\in\mathbf{Z}$）

21.(本小题满分 12 分)

已知点 $M(1,-2)$ 在抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 上, 过点 $N(0,-1)$ 的直线 l 与 C 相交于 A,B 两点, 直线 MA,MB 分别与 y 轴相交于点 D,E.

(1)当弦 AB 的中点横坐标为 3 时, 求 l 的一般方程;

(2)设 O 为原点, 若 $\overrightarrow{DN}=m\overrightarrow{ON},\overrightarrow{EN}=n\overrightarrow{ON}$, 求证: $\dfrac{mn}{m+n}$ 为定值.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=m(\ln x-1)-(2-m)x,(m\neq 0)$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)设函数 $F(x)=f(x)+2\sin x+1$, 求证: 当 $m=1$ 时, $F(x)$ 恰有两个零点.

参考答案

一、选择题

1. B【解析】

由已知得 $z=-\dfrac{2+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}+2\mathrm{i}=-\dfrac{(2+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{2}+2\mathrm{i}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$, 故 $z=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$. 故选 B.

2. A

【解析】由已知得 $A=\left\{x|3x-x^2+4>0\right\}=(-1,4), B=[t,+\infty)$, 由 $A\cap B=A$, 得 $A\subseteq B$, 所以 $t\quad -1$. 故选 A.

3. C

【解析】因为 $\mathbf{a}-\mathbf{b}=(\sqrt{3},-2)$, 所以 $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}|^2-2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+|\mathbf{b}|^2=5-2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=7$, 则 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=-1$,

所以 $|2\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2=4|\mathbf{a}|^2-4\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+|\mathbf{b}|^2=21$，即 $|2\mathbf{a}-\mathbf{b}|=\sqrt{21}$. 故选 C.

4. C

【解析】已知 a_n 表示第 n 行中的黑圈个数，设 b_n 表示第 n 行中的白圈个数，由于每个白圈产生下一行的 1 个白圈 1 个黑圈，一个黑圈产生下一行的 1 个白圈 2 个黑圈，$\therefore a_{n+1}=2a_n+b_n, b_{n+1}=a_n+b_n$，又 $\because a_1=0, b_1=1, a_2=1, b_2=1, a_3=2\times1+1=3, b_3=1+1=2, a_4=2\times3+2=8, b_4=3+2=5, a_5=2\times8+5=21$

$b_5=8+5=13, a_6=2\times21+13=55, b_6=21+13=34, a_7=2\times55+34=144, \therefore n=7$. 故选 C.

5. B

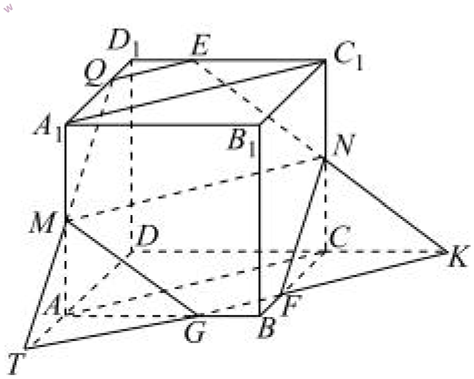
【解析】圆 C 的方程为 $x^2+(y-2)^2=4$，故圆心坐标为 $C(0,2)$，半径 $r=2$，

点 C 到线段 AB 的距离为 $d=\dfrac{|3\times0-2|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{10}}$，$\therefore |AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=\dfrac{6\sqrt{10}}{5}$，

$\therefore \triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d=\dfrac{6}{5}$. 故选 B.

6. B

【解析】如图所示，M,N 分别是 AA_1, CC_1 中点，则 $MN//A_1C_1//AC$，作 $QE//A_1C_1$，交 C_1D_1 于 E，连接 EN，并延长交 DC 的延长线于点 K，连接 QM，并延长交 DA 的延长线于点 T，连接 TK 交 AB 于点 G，交 BC 于点 F，则 $QENFGM$ 为过 M,N,Q 三点的截面. 由面面平行的性质定理得 $TK//QE$，从而有 $TK//AC\cdot A_1Q=2, D_1Q=1$，则 $D_1E=D_1Q=1, C_1E=A_1Q=2$，因为 N 是 CC_1 中点，$C_1E//CK$，所以 $CK=C_1E=2$，又因为 $TK//AC$，所以 $CF=CK=2$，同理



$AG=2, BG=BF=1, QE=\sqrt{2}, MN=3\sqrt{2}, EN=\sqrt{2^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}=\dfrac{5}{2}$，梯形 $QENM$ 是等腰梯形，且梯形 $QENM$ 与梯形 $FGMN$ 全等，高为 $h=\sqrt{EN^2-\left(\dfrac{MN-QE}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{17}}{2}$，截面面积 $S=2\times\dfrac{1}{2}(QE+MN)h=2\sqrt{34}$. 故选 B.

7. C【解析】小王投进区域(3)的概率为$2p$，投进区域(4)的概率为$1-4p$，故$0<p<\frac{1}{4}$. 小王第二次投完皮球后，首次中奖包含“第一次区域(1)(2)均未投中，第二次投中区域(1)或(2)”和“第一次与第二次均投中区域(3)”两个事件，则概率为$P_1=(1-2p)\times 2p+(2p)^2=2p$. 第四次投完皮球后，首次中奖，需前三次投完后有一次投进区域(3)，有两次投进区域(4)，

因此$P_2=\mathrm{C}_3^1\times 2p(1-4p)^2=6p\left(1+16p^2-8p\right)$，令$P_2-P_1<0$，

得$24p^2-12p+1<0$，解得$\frac{3-\sqrt{3}}{12}<p<\frac{3+\sqrt{3}}{12}$，又$0<p<\frac{1}{4}$，所以$\frac{3-\sqrt{3}}{12}<p<\frac{1}{4}$. 故选 C.

8. A

【解析】如图所示，F'为双曲线右焦点，则由$|OA|=|OB|$，$|OF|=\left|OF'\right|$，得四边形$AFBF'$为平行四边形，又由$|OA|=|OF|$，可得$|AB|=\left|FF'\right|$，可得四边形$AFBF'$为矩形. 设

$|BF|=\left|AF'\right|=m$，则

$\left|BF'\right|=|AF|=2a+m, |DF|=\frac{5}{2}m, \left|DF'\right|=2a+\frac{5}{2}m$

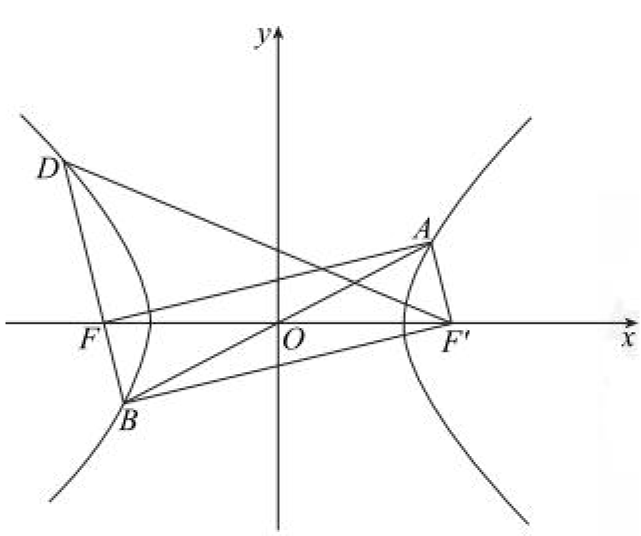
$\cos\angle DFF'=-\cos\angle AF'F=-\frac{|AF'|}{|FF'|}=-\frac{m}{2c}$，

在$\triangle DFF'$中，由余弦定理得$\left|DF'\right|^2=|DF|^2+\left|FF'\right|^2-2|DF|\cdot\left|FF'\right|\cdot\cos\angle DFF'$，

即$\left(2a+\frac{5}{2}m\right)^2=\frac{25}{4}m^2+4c^2+2\times\frac{5m}{2}\times 2c\cdot\frac{m}{2c}$，即$4a^2-5m^2+10am=4c^2$ ①，在 Rt$\triangle AFF'$中，$|AF|^2+\left|AF'\right|^2=\left|FF'\right|^2$，

即$(2a+m)^2+m^2=4c^2$ (2)，联立(1)(2)解得，$m=\frac{6}{7}a$，

代人 ②，得$\left(\frac{20a}{7}\right)^2+\left(\frac{6a}{7}\right)^2=4c^2$，解得$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{109}}{7}$. 故选 A.



10.BD

【解析】由 $\frac{c^5}{b}<\frac{c^5}{a}<0$，得 $c\neq 0$，当 $c>0$ 时，得 $0>\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，即 $a<b<0$；当 $c<0$ 时，

得 $0<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，即 $a>b>0$，综上 $a<b<0<c$ 或 $a>b>0>c$，上述两种情况均可得 $0<\frac{b}{a}<1$，

故A选项错误；当 $a<b<$

$0<c$ 时，得 $\frac{a-b}{c}<0$，当 $a>b>0>c$ 时，得 $\frac{a-b}{c}<0$，故B选项正确；令 $a=-1,b=-\frac{1}{2},c=1$，

则 $\frac{a}{b}=2$，$\frac{a+c^2}{b+c^2}=0$，从而得 $\frac{a}{b}>\frac{a+c^2}{b+c^2}$，故C选项错误；由上述论证可知 $bc<0<ba$ 恒成立，

故D正确.故选BD.

11.ABC

【解析】由已知可得四边形 $ACBD$ 为正方形，且四棱锥 $S-ACBD$ 各棱长均相等，由 O,F 分别为 CD,SC 的中点，可得 $OF//SD$，又 $OF\subset$ 平面 OEF，$SD\not\subset$ 平面 OEF，所以 $SD//$ 平面 OEF，故A选项正确；又 O,E 分别为 AB,SA 的中点，所以 $OE//SB$，

又 $OE\subset$ 平面 OEF，$SB\not\subset$ 平面 OEF，故 $SB//$ 平面 OEF，而 $SD\cap SB=S$，

且 $SB\subset$ 平面 SBD，$SD\subset$ 平面 SBD，所以平面 $OEF//$ 平面 SBD，故B选项正确；

设 $SA=1$，则 $SB=AD=BD=1,AB=\sqrt{2}AD=\sqrt{2}$，所以 $SA^2+SB^2=AB^2$，即 $SA\perp SB$，由B选项可知 $OE//SB$，所以 $OE\perp SA$，故C选项正确；$EF//AC//BD$，

故 $\angle SDB$（或其补角）即为异面直线 EF 与 SD

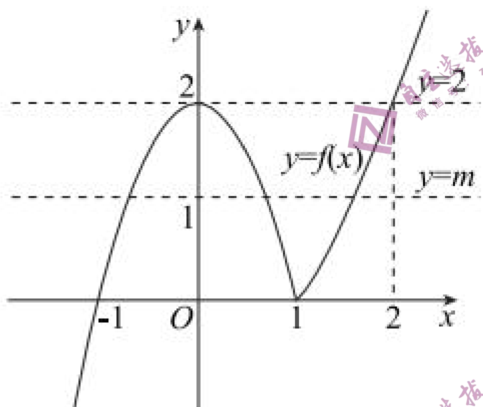
所成的角，而 $\angle SDB=60^\circ$，故D选项错误.故选ABC.

12.AD

【解析】由 $[f(f(x))]^2=(m+2)f(f(x))-2m$，得 $[f(f(x))-2][f(f(x))-m]=0$，解得

$f(f(x))=2$ 或 $f(f(x))=m$，作出 $f(x)$ 的图象如图所示，

若 $f(x)=2$，则 $x=0$ 或 $x=2$，设 $t=f(x)$，由 $f(f(x))=2$，得 $f(t)=2$，此时 $t_1=0$ 或 $t_2=2$．当 $t_1=0$ 时，$f(x)=t_1=0$，有 2 个不等的实根；当 $t_2=2$ 时，$f(x)=t_2=2$，有 2 个不等的实根，所以 $f(f(x))=2$ 有 4 个不等的实根，若原方程至少有 8 个不等的实根，则必须有 $m\neq2$ 且 $f(f(x))=m$ 至少有 4 个不等实根，若 $m=0$，由 $f(t)=m=0$，得 $t_1=-1$ 或 $t_2=1$，$f(x)=-1$ 有 1 个根，$f(x)=1$ 有 3 个不等的实根，此时有 4 个不等的实根，满足题意；若 $m>2$，由 $f(t)=m$，得 $t>2$，$f(x)=t$ 有 1 个根，不满足题意；若 $m<0$，由 $f(t)=m$，得 $t<-1$，$f(x)=t$ 有 1 个根，不满足题意；若 $0<m<2$，由 $f(t)=m$，得 $-1<t_1<0$ 或 $0<t_2<1$ 或 $1<t_3<2$，当 $-1<t_1<0$，$f(x)=t_1$ 有 1 个根，当 $0<t_2<1$ 时，$f(x)=t_2$ 有 3 个不等的实根，当 $1<t_3<2$ 时，$f(x)=t_3$ 有 3 个不等的实根，此时共有 7 个不等的实根，满足题意．综上实数 m 的取值范围为 $[0,2)$．故选 AD．



三、填空题

13. $\dfrac{1}{10}$

【解析】6 位球迷站成一排的不同方法数为 $n=\mathrm{A}_6^6$，其中男、女球迷相间排列的方法数为 $m=2\mathrm{A}_3^3\mathrm{A}_3^3$，所以所求的概率为 $P=\dfrac{m}{n}=\dfrac{2\mathrm{A}_3^3\mathrm{A}_3^3}{\mathrm{A}_6^6}=\dfrac{1}{10}$．

14. $\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{48}=1$ 或 $\dfrac{y^2}{49}+\dfrac{x^2}{48}=1$ 或 $\dfrac{y^2}{625}+\dfrac{x^2}{624}=1$ 或 $\dfrac{x^2}{625}+\dfrac{y^2}{624}=1$（答案不唯一，写出一个即可）

【解析】含 10 的勾股数有 $(6,8,10)$，$(10,24,26)$，不妨令 $m<n$，则有 $\begin{cases}a+c=8,\\a-c=6,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a+c=26,\\a-c=24,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=7,\\ c=1,\end{cases}$或$\begin{cases}a=25,\\ c=1.\end{cases}$当$a=7,c=1$时，$b^2=a^2-c^2=48$；当$a=25,c=1$时，$b^2=a^2-c^2=624$．故椭圆$C$的标准方程为$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{48}=1$或$\frac{y^2}{49}+\frac{x^2}{48}=1$或$\frac{y^2}{625}+\frac{x^2}{624}=1$或$\frac{x^2}{625}+\frac{y^2}{624}=1$.

15. 18

【解析】由于$f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=f\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$，则$f(x)$的图象关于直线$x=\frac{\pi}{6}$对称，$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{\pi\omega}{6}+\varphi\right)=\pm2,\frac{\pi\omega}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k_1\pi\left(k_1\in\mathbf{Z}\right)$

①，$f\left(-\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi\omega}{12}+\varphi\right)=0,-\frac{\pi\omega}{12}+\varphi=k_2\pi\left(k_2\in\mathbf{Z}\right.$②，①−②得

$\frac{\pi\omega}{4}=\left(k_1-k_2\right)\pi+\frac{\pi}{2},k_1-k_2\in\mathbf{Z}$，令$k=k_1-k_2,k\in\mathbf{Z}$，则

$\frac{\pi\omega}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2},\omega=4k+2(k\in\mathbf{Z}),\because\omega>0,\therefore k\in\mathbf{N},f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$的最小正周期

$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{2k+1}(k\in\mathbf{N}),\because f(x)$在区间$\left(\frac{5\pi}{72},\frac{\pi}{9}\right)$上单调，

$\therefore\frac{T}{2}\quad\frac{\pi}{9}-\frac{5\pi}{72}=\frac{\pi}{24},\therefore T=\frac{\pi}{2k+1}\quad\frac{\pi}{12}$，解得$k\quad\frac{11}{2}(k\in\mathbf{N}),\omega=4k+2(k\in\mathbf{N})$，

当$k=5$时，$\omega=22$，则②式为$-\frac{11}{6}\pi+\varphi=k_2\pi,\varphi=\frac{11}{6}\pi+k_2\pi\left(k_2\in\mathbf{Z}\right)$，又

$|\varphi|\quad\frac{\pi}{2},\therefore\varphi=-\frac{\pi}{6},k_2=-2$，此时$f(x)=2\sin\left(22x-\frac{\pi}{6}\right)$，当$x\in\left(\frac{5\pi}{72},\frac{\pi}{9}\right)$

时，$22x-\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{49\pi}{36},\frac{41\pi}{18}\right)$，$\therefore$此时$f(x)$不单调，不符合题意，舍去；当$k=4$时，$\omega=18$，则②

式为$-\frac{3}{2}\pi+\varphi=k_2\pi,\varphi=\frac{3\pi}{2}+k_2\pi\left(k_2\in\mathbf{Z}\right)$，又$|\varphi|\quad\frac{\pi}{2}$，当

$\therefore k_2=-1$时，$\varphi=\frac{\pi}{2}$，当$k_2=-2$时，$\varphi=-\frac{\pi}{2}$，

此时$f(x)=2\sin\left(18x\pm\frac{\pi}{2}\right)=\pm2\cos18x$，当$x\in\left(\frac{5\pi}{72},\frac{\pi}{9}\right)$时，$18x\in\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right)$，

此时 $f(x)$ 单调, 符合题意. 故 ω 的最大值为 18.

16. $\left[\dfrac{2023}{\ln 2},+\infty\right)$

【解析】$f'(x)=2023\mathrm{e}^x-2ax$，因为 x_1,x_2 是函数 $f(x)=2023\mathrm{e}^x-ax^2-1(a\in\mathbf{R})$ 的两个极值点, 所以 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 是函数 $f'(x)$ 的两个零点,

即是方程 $2023\mathrm{e}^x-2ax=0$ 的两个不相等的实数根, $x=0$ 显然不符合方程 $2023\mathrm{e}^x-2ax=0$,

所以 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 是方程 $\dfrac{2a}{2023}=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ 的两个根,

所以函数 $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ 的图象与直线 $y=\dfrac{2a}{2023}$ 有两个不同的交点,

交点横坐标分别为 x_1,x_2，由于 $g'(x)=\dfrac{(x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}$，所以当 $x<0$ 或 $0<x<1$ 时,

$g'(x)<0$；当 $x>1$ 时, $g'(x)>0$，故 $g(x)$ 的减区间为 $(-\infty,0)$ 和 $(0,1)$，增区间为 $(1,+\infty)$，

当 $x\to-\infty$ 时, $g(x)\to0$，且 $g(x)<0$，当 $x<0$ 且 $x\to0$ 时,

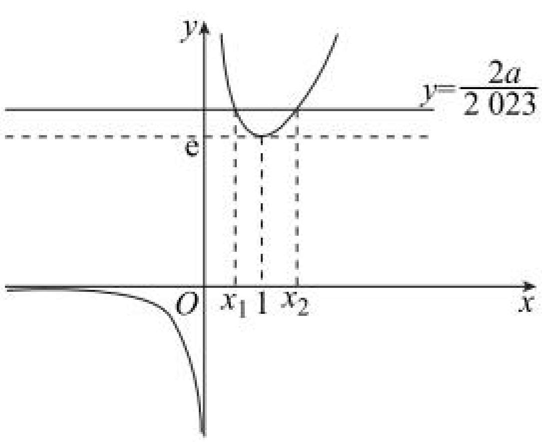
$g(x)\to-\infty$；当 $0<x\quad1$ 时, $x\to0$ 时, $g(x)\to+\infty$，

且 $g(x)_{\min}=g(1)=\mathrm{e}$；当 $x>1$ 时, $x\to+\infty$ 时, $g(x)\to+\infty$.

作出 $g(x)$ 的草图如图所示, 由图可知, 若有两个交点, 应 $\dfrac{2a}{2023}>\mathrm{e}$，且 $x_1>0,x_2>0$，

因为 $x_2\quad 2x_1$，取 $x_2=2x_1$，并令 $x_1=t,(t>0)$，则 $x_2=2t$，所以 $\dfrac{\mathrm{e}^t}{t}=\dfrac{\mathrm{e}^{2t}}{2t}$，解得 $t=\ln 2$，

此时 $\dfrac{2a}{2023}=\dfrac{2}{\ln 2}$，得 $a=\dfrac{2023}{\ln 2}$，若 $x_2\quad 2x_1$ 需 $a\quad\dfrac{2023}{\ln 2}$，即实数 a 的取值范围是 $\left[\dfrac{2023}{\ln 2},+\infty\right)$.



17. 解:(1) 由题可知 $S_{n+1}-S_n=a_n+2$，即 $a_{n+1}=a_n+2$，所以数列 $\left\{a_n\right\}$ 是首项为 a_1，公差为 2 的等差数列. 若选(1):由 $a_2+a_9=20$，得 $a_1+d+a_1+8d=20$，即 $2a_1=20-9d$，

所以 $2a_1=20-9\times2=2$，解得 $a_1=1$，所以 $a_n=a_1+(n-1)d=1+2(n-1)=2n-1$，

即数列 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式为 $a_n=2n-1$. 若选(2):因为 a_1,a_2,a_5 成等比数列,

所以 $a_2^2=a_1a_5$，即 $\left(a_1+2\right)^2=a_1\left(a_1+8\right)$，解得 $a_1=1$，

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=1+(n-1)\times2=2n-1$，即数列 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式为 $a_n=2n-1$.

若选(3):由 $S_5=a_2+a_4+15$，得 $5a_3=2a_3+15$，即 $a_3=a_1+4=5$，

所以 $a_1=1$，即数列 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式为 $a_n=2n-1$.

(2) 由(1)得 $b_n=a_n-10=2n-11$，令 $b_n<0$，得 $n<6$，所以当 $n<6$ 时,

$$T_n=|b_1|+|b_2|+\cdots+|b_n|=9+7+\cdots+(11-2n)=\frac{n(9+11-2n)}{2}=10n-n^2,$$

当 n 6 时，$T_n=T_5+|b_6|+|b_7|+\cdots+|b_n|=-S_5+b_6+b_7+\cdots+b_n$

$$=S_n-10n+100-2S_5$$

$$=\frac{n(1+2n-1)}{2}-10n+100-2\times\frac{5(1+9)}{2}=n^2-10n+50$$

综上所述，$T_n=\begin{cases}10n-n^2, n<6\\ n^2-10n+50, n\geq6\end{cases}$

18. 解:(1) 由表中数据可得 $\overline{y}=\frac{1}{7}\times(891+888+351+220+200+138+112)=400$，

因为 $t=\frac{1}{x}$，设 y 关于 t 的线性回归方程为 $\hat{y}=\hat{b}t+\hat{a}$，

则 $\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{7}t_iy_i-7\overline{t}\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{7}t_i^2-7\overline{t}^2}\approx\frac{1586-7\times0.37\times400}{0.55}=1000$，则 $\hat{a}=400-1000\times0.37=30$，

故 y 关于 x 的回归方程为 $\hat{y}=\frac{1000}{x}+30$.

(2) 由回归方程 $\hat{y}=\frac{1000}{x}+30$ 可知, 随着 x 的增大, y 逐渐减小, 当 $x=24$ 时,

$\hat{y}=\dfrac{1000}{24}+30\approx 71.7<75$, 故第 24 年该地区所剩的沙漠面积会小于 75 公顷.

19. 解: (1) 由正弦定理得 $2\left(\sin^2 C-\sin A\cos B\sin C\right)-\sin B\sin C=0,$

又 $\because C\in\left(0,\pi\right)$, $\therefore \sin C\neq 0$, $\therefore 2\sin C-2\sin A\cos B-\sin B=0$,

$\therefore 2\sin\left(A+B\right)-2\sin A\cos B-\sin B=0, \therefore 2\cos A\sin B=\sin B,$

又 $B\in\left(0,\pi\right), \therefore \sin B\neq 0 \therefore 2\cos A=1$, 即 $\cos A=\dfrac{1}{2}, \because A\in\left(0,\pi\right), \therefore A=\dfrac{\pi}{3}$

由 $c\tan C=b\tan B$, 则 $c\cdot\dfrac{\sin C}{\cos C}=b\cdot\dfrac{\sin B}{\cos B}$, 即 $\sin^2 C\cos B-\sin^2 B\cos C=0$,

$\therefore \left(1-\cos^2 C\right)\cos B-\left(1-\cos^2 B\right)\cos C=0$, 整理得 $(1+\cos B\cos C)(\cos B-\cos C)=0$.

$\because B,C\in(0,\pi)$, $\therefore \cos B,\cos C\in(-1,1)$, $\therefore 1+\cos B\cos C\neq 0$, 则 $\cos B=\cos C$,

$\therefore B=C=\dfrac{\pi-A}{2}=\dfrac{\pi}{3}=A$, $\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形.

(2) 由 (1) 得 $A=\dfrac{\pi}{3}$, 由正弦定理得 $a=2R\sin A=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2$,

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc$,

$\therefore (b+c)^2-4=3bc \quad (1)$,

$$\therefore \frac{bc}{a+b+c}=\frac{3bc}{3(2+b+c)}=\frac{(b+c)^2-4}{3(2+b+c)}=\frac{1}{3}(b+c-2).$$

$$\because bc \le \frac{(b+c)^2}{4},$$

$\therefore$由（1）式可得$(b+c)^2-4\le\frac{3(b+c)^2}{4}$,

即$b+c\le 4$，当且仅当$b=c=2$时等号成立，（11 分）

$$故\ \frac{bc}{a+b+c}=\frac{1}{3}(b+c-2)\le\frac{2}{3},$$

$\therefore \frac{bc}{a+b+c}$的最大值为$\frac{2}{3}$.

20.解:(1)$\because AD//BC, AB\perp BC$,

$\therefore AD\perp AB$,

又$\because$平面$PAD\perp$平面$ABCD$,平面$PAD\cap$平面$ABCD=AD, AB\subset$平面$ABCD$,

$\therefore AB\perp$平面PAD.

(4 分)

(2)取AD的中点O,连接OC, OP,

$\because \triangle PAD$为等边三角形,且O是AD的中点,

$\therefore PO\perp AD$

$\therefore PO=AP\sin 60^\circ=\sqrt{3}$.

又$\because$平面$PAD\perp$平面$ABCD$,平面$PAD\cap$平面

$ABCD=AD, PO\subset$平面PAD,

$\therefore PO\perp$平面$ABCD$,

$\because AO=\frac{1}{2}AD=BC=1, AO//BC, AB\perp BC$

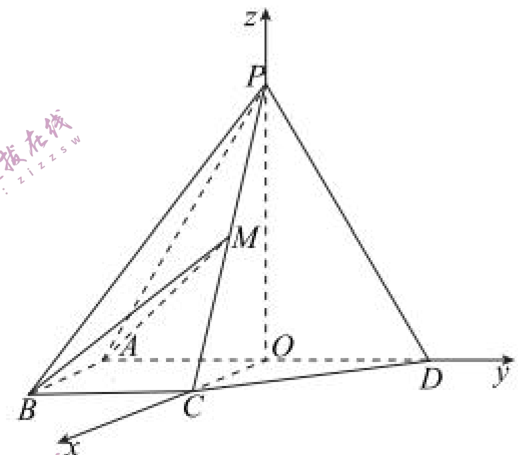
$\therefore$ 四边形 $ABCO$ 为矩形, 又 $\because PO\perp$ 平面 $ABCD$ $\therefore PO,OD,OC$ 两两垂直,

故以 O 为坐标原点, OC,OD,OP 分别为 x,y,z 轴建

立如图所示的空间直角坐标系,

则 $A(0,-1,0),B(1,-1,0),C(1,0,0),P(0,0,\sqrt{3}),M\left(\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

则 $\overrightarrow{AB}=(1,0,0),\overrightarrow{BM}=\left(-\frac{1}{2},1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\overrightarrow{AP}=(0,1,\sqrt{3})$.



设平面 ABM 的法向量为 $\mathbf{n}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$,

$$\begin{cases}\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{AB}=x_1=0\\ \mathbf{n}\cdot\overrightarrow{BM}=-\frac{1}{2}x_1+y_1+\frac{\sqrt{3}}{2}z_1=0\end{cases}$$

令 $z_1=2$, 得 $\mathbf{n}=(0,-\sqrt{3},2)$. 设平面 ABP 的法向量为

$\mathbf{m}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$,

则 $\begin{cases}m\cdot\overrightarrow{AB}=x_2=0\\ m\cdot\overrightarrow{AP}=y_2+\sqrt{3}z_2=0\end{cases}$,

令 $z_2=1$, 得 $\mathbf{m}=(0,-\sqrt{3},1)$.

设二面角 $M-AB-P$ 的大小为 θ, 由图可知 θ 为锐角,

则 $\cos\theta=\frac{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{m}|}{|\mathbf{n}||\mathbf{m}|}=\frac{|0\times 0+(-\sqrt{3})\times(-\sqrt{3})+2\times 1|}{\sqrt{0+3+4}\cdot\sqrt{0+3+1}}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$,

$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{21}}{14}$, $\therefore$ 二面角 $M-AB-P$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{14}$.

21. 解: (1) 由点 $M(1,-2)$ 在抛物线 $C: y^2=2px$ 上, 所以 $p=2$,

所以抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$. 设直线 l 的方程为 $y=kx-1(k\neq 0), A\left(x_1,y_1\right), B\left(x_2,y_2\right)$.

由 $\begin{cases}y^2=4x,\\ y=kx-1,\end{cases}$ 得 $k^2x^2-(2k+4)x+1=0$.

依题意 $\Delta=(2k+4)^2-4\times k^2\times 1>0$, 解得 $k>-1$ 且 $k\neq 0$. 且 $x_1+x_2=\frac{2k+4}{k^2}, x_1x_2=\frac{1}{k^2}$.

因为弦 AB 的中点横坐标为 3, 所以 $x_1+x_2=6$, 即 $\dfrac{2k+4}{k^2}=6$,

解得 $k=1$ 或 $k=-\dfrac{2}{3}$, 所以 l 的一般方程为 $x-y-1=0$ 或 $2x+3y+3=0$.

(2) 直线 MA 的方程为 $y+2=\dfrac{y_1+2}{x_1-1}(x-1)$. 令 $x=0$, 得点 D 的纵坐标为 $y_D=\dfrac{1-(k+2)x_1}{x_1-1}$.

所以 $D\left(0,\dfrac{1-(k+2)x_1}{x_1-1}\right)$, 同理得点 E 的坐标为 $E\left(0,\dfrac{1-(k+2)x_2}{x_2-1}\right)$.

由 $\overrightarrow{DN}=m\overrightarrow{ON},\overrightarrow{EN}=n\overrightarrow{ON}$, 得 $m=1+y_D=-\dfrac{(1+k)x_1}{x_1-1}$,

$n=1+y_E=-\dfrac{(1+k)x_2}{x_2-1}$. 所以 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1-x_1}{(k+1)x_1}+\dfrac{1-x_2}{(k+1)x_2}$

$=\dfrac{1}{k+1}\left(\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}-2\right)=\dfrac{1}{k+1}(2k+4-2)=2$.

所以 $\dfrac{mn}{m+n}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}=\dfrac{1}{2}$, 即 $\dfrac{mn}{m+n}$ 为定值 $\dfrac{1}{2}$.

22. 解: (1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,

$f'(x)=\dfrac{m}{x}+m-2=\dfrac{(m-2)x+m}{x}$, 当 $m=2$ 时, $f'(x)=\dfrac{2}{x}>0$, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增;

当 $m>2$ 时, $f'(x)=\dfrac{(m-2)\left(x+\dfrac{m}{m-2}\right)}{x}>0$, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增;

当 $0<m<2$ 时, 令 $f'(x)>0$, 得 $0<x<\dfrac{m}{2-m}$, 此时 $f(x)$ 单调递增,

令 $f'(x)<0$, 得 $x>\dfrac{m}{2-m}$, 此时 $f(x)$ 单调递减; 当 $m<0$ 时, $f'(x)<0$,

$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. 综上所述, 当 $m\quad 2$ 时, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增;

当 $0<m<2$ 时, $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{m}{2-m}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\dfrac{m}{2-m},+\infty\right)$ 上单调递减;

当 $m<0$ 时, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

(2) 当 $m=1$ 时, $F(x)=\ln x-1-x+2\sin x+1=2\sin x-x+\ln x$, $F'(x)=\dfrac{1}{x}-1+2\cos x$

令 $g(x)=F^{'}(x)=\dfrac{1}{x}-1+2\cos x$，则 $g^{'}(x)=-2\sin x-\dfrac{1}{x^{2}}$，

(1) 当 $x\in(0,\pi)$ 时，$g^{'}(x)=-2\sin x-\dfrac{1}{x^{2}}<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递减，

又因为 $g\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3}{\pi}>0, g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2}{\pi}-1<0$，所以 $g(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上有唯一的零点 α .

当 $x\in(0,\alpha)$ 时，$F^{'}(x)>0, F(x)$ 单调递增；当 $x\in(\alpha,\pi)$ 时，$F^{'}(x)<0, F(x)$ 单调递减，

所以 $F(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上存在唯一的极大值点 α，且 $\dfrac{\pi}{3}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$

所以 $F(\alpha)>F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\ln\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}+2>2-\dfrac{\pi}{2}>0$，

又因为 $F\left(\dfrac{1}{e^{2}}\right)=-2-\dfrac{1}{e^{2}}+2\sin\dfrac{1}{e^{2}}<-2-\dfrac{1}{e^{2}}+2<0$

所以 $F(x)$ 在 $(0,\alpha)$ 上恰有一个零点. 又因为 $F(\pi)=\ln\pi-\pi<2-\pi<0$，

所以 $F(x)$ 在 (α,π) 上也恰有一个零点. 所以 $F(x)$ 在 $x\in(0,\pi)$ 上有两个零点.

(2) 当 $x\in[\pi,2\pi)$ 时，因为 $\sin x\quad 0$，所以 $F(x)\quad \ln x-x$，设 $h(x)=\ln x-x, h^{'}(x)=\dfrac{1}{x}-1<0$，

所以 $h(x)$ 在 $[\pi,2\pi)$ 上单调递减，所以 $h(x)\quad h(\pi)<0$，所以当 $x\in[\pi,2\pi)$ 时，$F(x)\quad h(x)\quad h(\pi)<0$ 恒成立，所以 $F(x)$ 在 $[\pi,2\pi)$ 上没有零点.

(3) 当 $x\in[2\pi,+\infty)$ 时，$F(x)\quad \ln x-x+2$，设 $\varphi(x)=\ln x-x+2, \varphi^{'}(x)=\dfrac{1}{x}-1<0$，

所以 $\varphi(x)$ 在 $[2\pi,+\infty)$ 上单调递减，所以 $\varphi(x)\quad \varphi(2\pi)=\ln(2\pi)-2\pi+2<3-2\pi+2=5$
$-2\pi<0$ 所以当 $x\in[2\pi,+\infty)$ 时，$F(x)\quad \varphi(x)\quad \varphi(2\pi)<0$
恒成立，所以 $F(x)$ 在 $[2\pi,+\infty)$ 上没有零点. 综上，$F(x)$ 恰有两个零点.