2023届高三第一次质量监测

数　学

本试卷共6页，22小题，满分150分。考试时间120分钟。

注意事项：1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。将条形码横贴在答题卡“条形码粘贴处”。

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M=\left\{x\left|\frac{x+4}{x-3}\leqslant 0\right.\right\}$，$N=\left\{x\left|\left(\frac{1}{3}\right)^x\leqslant 3\right.\right\}$，则 $M\cap N=$

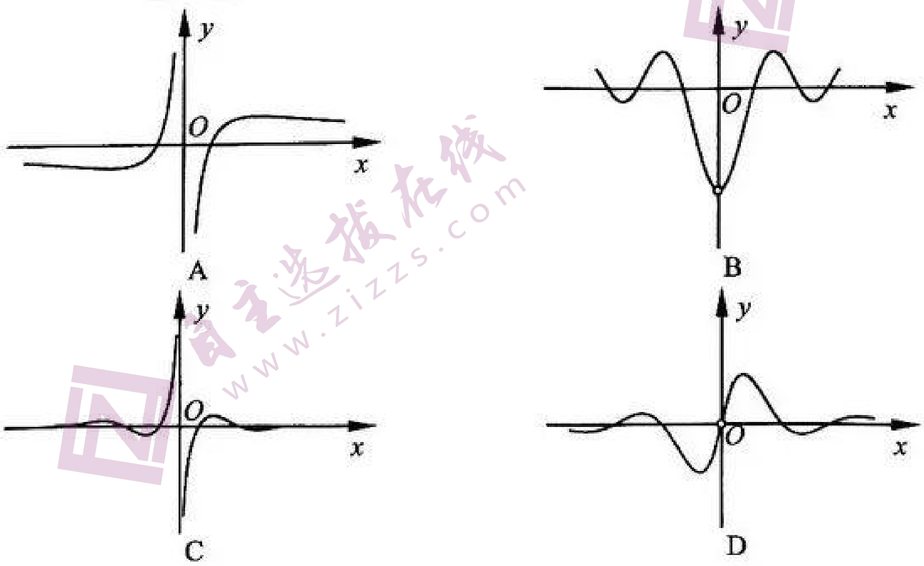
A. $[-4,-1]$　　B. $[-4,3)$　　C. $[-1,3)$　　D. $[-1,3]$

2. 已知 $b>0$，则“$a>b+1$”是“$\sqrt{a}>\sqrt{b}+1$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 函数 $f(x)=\frac{\cos 2x}{2^{-x}-2^{x}}$ 的部分图象大致为



4. 在△ABC中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，则下列条件能确定三角形有两解的是

A. $a=5, b=4, A=\frac{\pi}{6}$　　B. $a=4, b=5, A=\frac{\pi}{4}$

C. $a=5, b=4, A=\frac{5\pi}{6}$　　D. $a=4, b=5, A=\frac{\pi}{3}$

5. 通过研究正五边形和正十边形的作图，古希腊数学家毕达哥拉斯发现了黄金分割率，黄金分割率的值也可以用$2\sin 18°$表示，即$\frac{\sqrt{5}-1}{2}=2\sin 18°$．记$m=2\sin 18°$，则$\frac{\sqrt{1+\cos 36°}}{(m^2-2)\cdot\sin 144°}=$

A. $-\sqrt{2}$　　B. -2　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{5}-1$

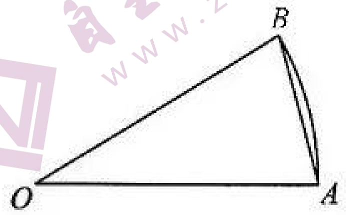
6. 已知过点$A(a,0)$作曲线$y=(1-x)e^x$的切线有且仅有1条，则$a=$

A. -3　　B. 3　　C. -3或1　　D. 3或1

7. 设$a=\frac{2}{21}$，$b=\ln\frac{25}{21}$，$c=\sin\frac{2}{21}$，则

A. $c<b<a$　　B. $a<b<c$　　C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

8. 如图是一个近似扇形的湖面，其中$OA=OB=r$，弧AB的长为$l\,(l<r)$．为了方便观光，欲在A,B两点之间修建一条笔直的走廊AB．若当$0<x<\frac{1}{2}$时，$\sin x\approx x-\frac{x^3}{6}$，扇形$OAB$的面积记为$S$，则$\frac{AB}{S}$的值约为



A. $\frac{2}{l}-\frac{r^2}{12l^3}$　　B. $\frac{2}{r}-\frac{l^2}{12r^3}$

C. $\frac{1}{l}-\frac{r^2}{24l^3}$　　D. $\frac{1}{r}-\frac{l^2}{24r^3}$

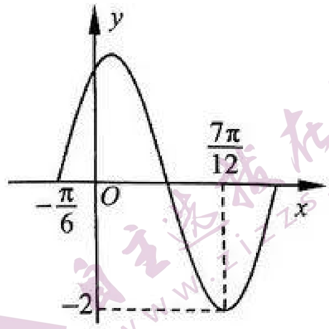
二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. 设$a>0$，$b>0$，$a+b=1$，则下列不等式中一定成立的是

A. $ab\leqslant\frac{1}{4}$　　B. $\sqrt{a}+\sqrt{b}\geqslant\sqrt{2}$

C. $2^a+2^b\geqslant 2\sqrt{2}$　　D. $\frac{b}{a}+\frac{4}{b}\geqslant 8$

10．已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（其中 $A>0,\omega>0$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$）的部分图象如图所示，则



A．$\omega=2$

B．$f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{2\pi}{3}$ 对称

C．$f(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

D．$f(x)$ 在 $\left[-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{3}\right]$ 上的值域为 $[-2,1]$

11．对于定义域为 $[0,+\infty)$ 的函数 $y=f(x)$，若同时满足下列条件：① $\forall x\in[0,+\infty)$，$f(x)\geqslant 0$；② $\forall x\geqslant 0,y\geqslant 0$，$f(x+y)\geqslant f(x)+f(y)$，则称函数 $f(x)$ 为“H 函数”．下列结论正确的是

A．若 $f(x)$ 为“H 函数”，则其图象恒过定点 $(0,0)$

B．函数 $f(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数},\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}$ 在 $[0,+\infty)$ 上是“H 函数”

C．函数 $f(x)=[x]$ 在 $[0,+\infty)$ 上是“H 函数”（$[x]$ 表示不大于 x 的最大整数）

D．若 $f(x)$ 为“H 函数”，则 $f(x)$ 一定是 $[0,+\infty)$ 上的增函数

12．已知 x_1,x_2 分别是函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+x-2$ 和 $g(x)=\ln x+x-2$ 的零点，则

A．$x_1+x_2=2$　　　　B．$\mathrm{e}^{x_1}+\ln x_2=2$

C．$x_1x_2>\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}$　　　　D．$x_1^2+x_2^2<3$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．若 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}=$______．

14．已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$，$AB=2$，$AC=4$，则 $\triangle ABC$ 的中线 AD 长的一个值为______．

15．某容量为 V 万立方米的小型湖，由于周边商业过度开发，长期大量排放污染物，水质变差，今年政府准备治理，用没有污染的水进行冲洗．假设每天流进和流出的水均为

r 万立方米，下雨和蒸发正好平衡．用函数 $g(t)$ 表示经过 t 天后的湖水污染质量分数，已知 $g(t)=g(0)\cdot e^{-\frac{r}{V}t}$，其中 $g(0)$ 表示初始湖水污染质量分数．如果 $V=200$，$r=4$，要使湖水的污染水平下降到开始时污染水平的10%以下，至少需要经过________天．（参考数据：$\ln 10\approx 2.303$）

16. 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，当 $x>0$ 时，$f'(-x)>2f(x)$，且 $f(3)=0$，则不等式 $f(x)>0$ 的解集为________．

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10分）

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{1}{2}, a_2=1$，$2a_{n+2}-a_n=a_{n+1}$．

（1）证明：数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是等比数列；

（2）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式．

18.（12分）

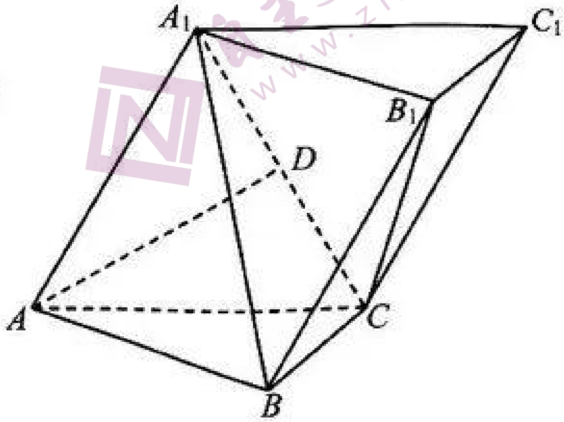
在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c．

（1）若 $C=2A, a=2, b=3$，求 c；

（2）若 $a^2+\frac{1}{5}b^2=c^2$，求证：$3\tan A=2\tan C$．

19.（12 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 $AA_1C_1C\perp$ 底面 ABC，侧面 AA_1C_1C 是菱形，$\angle A_1AC=60^\circ$，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=BC=2$．



（1）若 D 为 A_1C 的中点，求证：$AD\perp A_1B$；

（2）求二面角 $A-A_1C-B_1$ 的正弦值．

20.（12 分）

某校组织围棋比赛，每场比赛采用五局三胜制（一方先胜三局即获胜，比赛结束），比赛采用积分制，积分规则如下：每场比赛中，如果四局及四局以内结束比赛，取胜的一方积 3 分，负者积 0 分；五局结束比赛，取胜的一方积 2 分，负者积 1 分．已知甲、乙两人比赛，甲每局获胜的概率为$\frac{1}{2}$．

（1）在一场比赛中，甲的积分为 X，求 X 的概率分布列；

（2）求甲在参加三场比赛后，积分之和为 5 分的概率．

21.（12分）

已知A'，A分别是椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右顶点，$B$，$F$分别是$C$的上顶点和左焦点．点$P$在$C$上，满足$PF\perp A'A$，$AB//OP$，$|FA'|=2-\sqrt{2}$．

（1）求C的方程；

（2）过点F作直线l（与x轴不重合）交C于M，N两点，设直线AM，AN的斜率分别为k_1，k_2，求证：k_1k_2为定值．

22.（12分）

设函数$f(x)=x\ln x$，$g(x)=\frac{x}{x+1}$．

（1）若直线$y=\frac{1}{2}x+b$是曲线$f(x)$的一条切线，求b的值；

（2）证明：①当$0<x<1$时，$g(x)\cdot f(x)>\frac{1}{2}x(x-1)$；

②$\forall x>0$，$g(x)-f(x)<\frac{2}{e}$．（e是自然对数的底数，e≈2.718）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。