NCS20210607 项目第三次模拟测试卷
文科数学

本试卷共 4 页，23 小题，满分 150 分. 考试时间 120 分钟.

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填涂在答题卡上，并在相应位置贴好条形码.
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案信息涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案.
3. 非选择题必须用黑色水笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来答案，然后再写上新答案，不准使用铅笔和涂改液.不按以上要求作答无效.
4. 考生必须保证答题卡整洁. 考试结束后，将试卷和答题卡一并交回.

一. 选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x\mid e^x\le e\}$，$B=\{x\in N\mid x^2\le 4\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{-2,-1,0,1\}$　　B. $\{-1,0,1\}$　　C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{0,1\}$

2. 若复数 z 在复平面内对应的点是 $(1,-1)$，则 $\dfrac{1}{z-1}=$

A. i　　B. $-i$　　C. 1　　D. -1

3. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\log_3 x, & x\ge 1\\ 2^x, & x<1\end{cases}$，则 $f(f(0))=$

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

4. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_3=1$，$S_9=18$，则 $a_7=$

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

5. 若曲线 $f(x)=(ax-1)e^x$ 在 $x=0$ 处的切线与直线 $x+y-6=0$ 垂直，则 $a=$

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

6. 已知某 6 个数据的平均数为 4，方差为 8，现加入 2 和 6 两个新数据，此时 8 个数据的方差为

A.8　　B.7　　C.6　　D.5

7. 设双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左右焦点分别为 $F_1(-c,0),F_2(c,0)$，圆 $(x-c)^2+y^2=4c^2$ 与双曲线 C 在第一象限的交点为 A，若 ΔAF_1F_2 的周长为 $7c$，则双曲线的渐近线方程为

A. $2x\pm y=0$　　B. $x\pm 2y=0$　　C. $\sqrt{3}x\pm y=0$　　D. $x\pm\sqrt{3}y=0$

8. 平安夜苹果创意礼品盒，如图 1，它的形状可视为一个十面体，其中上下底面为全等的正方形，八个侧面是全等的等腰三角形.如图 2，底面正方形 $ABCD$ 的边长为 2，上底面 $EFGH$ 与下底面 $ABCD$ 之间的距离为 $\sqrt{2}+1$，则该几何体的侧面积为

A. $6\sqrt{6}$

B. $8\sqrt{6}$

C. $16\sqrt{2}$

D. $12\sqrt{2}$

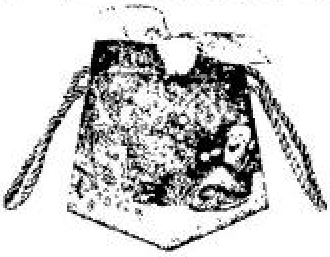


图 1

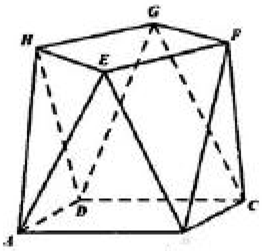


图 2

9. 奇函数 $f(x)$ 满足 $f(2-x)=f(x)$，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=\log_2(x+a)$，则 $f(2021)=$

A.0　　B.1　　C.2　　D.-1

10. 某电影票单价 30 元，相关优惠政策如下：①团购 10 张票，享受 9 折优惠；②团购 30 张票，享受 8 折优惠；③购票总额每满 500 元减 80 元.每张电影票只能享受一种优惠政策，现需要购买 48 张电影票，合理设计购票方案，费用最少为

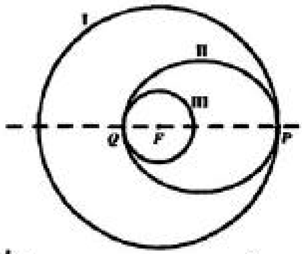
A.1180 元　　B.1230 元　　C.1250 元　　D.1152 元

11. 已知函数 $f(x)=A\sin(2x+\varphi)(A>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的部分对应值如下表所示，则 $\varphi=$

x	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$f(x)$	-2	$-2\sqrt{3}$	-2	2	$2\sqrt{3}$

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $-\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $-\frac{\pi}{3}$

12. 如图所示，“嫦娥五号”月球探测器飞行到月球附近时，首先在以月球球心 F 为圆心的圆形轨道 I 上绕月球飞行，然后在 P 点处变轨进入以 F 为一个焦点的椭圆轨道 II 绕月球飞行，最后在 Q 点处变轨进入以 F 为圆心的圆形轨道 III 绕月球飞行，设圆形轨道 I 的半径为 R，圆形轨道 III 的半径为 r，则下列结论中正确的序号为



①轨道 II 的焦距为 $R-r$；②若 R 不变，r 越大，轨道 II 的短轴长越小；③轨道 II 的长轴长为 $R+r$；④若 r 不变，R 越大，轨道 II 的离心率越大.

A.①②③　　B.①②④　　C.①③④　　D.②③④

二. 填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分. 共 20 分.

13. 已知单位向量 $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$，则 $|\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}|=$________.

14. 若变量 x,y 满足 $\begin{cases}x+y-2\geq 0\\ x-y+2\leq 0\\ y\leq 4\end{cases}$，则目标函数 $z=x-2y$ 的最小值为________.

15.等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_6=9S_3$，则 $\frac{S_3}{a_3}=$________.

16. 已知圆 $C:x^2+(y-1)^2=r^2$ 与 $y=\sin x$ 有唯一的公共点，且公共点的横坐标为 α，则 $\frac{2\sin 2\alpha-4\cos\alpha}{\alpha}$ 的值为________.

三．解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答；第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17.（12 分）"自媒体"是指普通大众通过网络等途径向外发布他们本身的事实和新闻的传播方式．某"自媒体"作者 2020 年度在"自媒体"平台 A 上发布了 200 条事实和新闻，现对其点击量进行统计，如表格所示：

点击量（万次）	$[0,1]$	$(1,50]$	$(50,100]$	$(100,200]$
条数	20	100	60	20

（Ⅰ）现从这 200 条事实和新闻中采用分层抽样的方式选出 10 条，求点击量超过 50 万次的条数；

（Ⅱ）为了鼓励作者，平台 A 在 2021 年针对每条事实和新闻推出如下奖励措施：

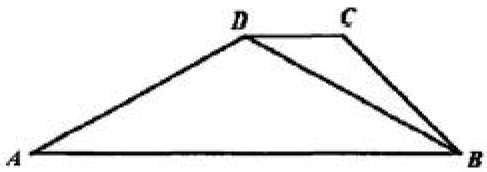
点击量（万次）	$[0,1]$	$(1,50]$	$(50,100]$	$(100,200]$
奖金（元）	0	200	500	1000

若该作者在 2021 年 5 月份发布了 20 条事实和新闻，请估计其可以获得的奖金数．

18.（12 分）如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AB//CD$，$\angle BCD=135°$，$BD=\sqrt{5}CD=\sqrt{10}$．

（Ⅰ）求 $\sin\angle CBD$ 的值；

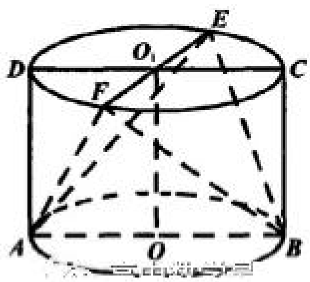
（Ⅱ）若 ΔABD 的面积为 4，求 AD 的长．



19.（12 分）如图，四边形 $ABCD$ 是圆柱的轴截面，EF 为$\odot O_1$的直径，且 $AB=2$，$BC=\sqrt{3}$．

（Ⅰ）若 $EF\perp CD$，求证：$BE=BF$；

（Ⅱ）若三棱锥 $A-BEF$ 的体积为$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，求 $\angle EO_1C$ 的值．



20.（12 分）已知抛物线$C:x^2=4y$，过点$P(1,-2)$作斜率为$k(k>0)$的直线l_1与抛物线C相交于A,B两点.

（Ⅰ）求k的取值范围；

（Ⅱ）过P点且斜率为$-k$的直线l_2与抛物线C相交于M,N两点，求证：直线AM、BN及y轴围成等腰三角形.

21.（12 分）已知函数$f(x)=e^x-\frac{1}{x^2}$.

（Ⅰ）判断函数$f(x)$的零点个数；

（Ⅱ）若$f(x)\geq\frac{2a\ln x}{x^2}+\frac{a}{x}$，求$a$的值.

（二）选考题：共 10 分.请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.（10 分）选修 4-4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系xOy中，曲线C_1的参数方程为：$\begin{cases}x=1+2\cos\alpha\\y=2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$为参数），以坐标原点为极点，$x$轴的非负半轴为极轴建立极坐标系，曲线$C_2$的极坐标方程为：$\theta=\theta_0(\theta_0\in[0,\pi),\rho\in R)$.

（Ⅰ）求曲线C_1的极坐标方程；

（Ⅱ）设A,B是曲线C_1、C_2的公共点，若$\frac{1}{|OA|}+\frac{1}{|OB|}=\frac{4}{3}$，求曲线$C_2$的直角坐标方程.

23.（10 分）选修 4-5：不等式选讲

已知函数$f(x)=|x-3|+2|x-1|$.

（Ⅰ）求$f(x)$的最小值m；

（Ⅱ）已知$a>0,b\geq0$，若$a+2b=m$时，正常数t使得$ta+ab$的最大值为 2，求t的值

NCS20210607 项目第三次模拟测试卷
文科数学参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	A	A	C	C	B	C	B	B	A	D	C

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分.

13. $\sqrt{3}$　　14. -10　　15. $\frac{7}{4}$　　16. -4

三．解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤． 第 17 题-21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22 题、23 题为选考题，考生根据要求作答．

17.【解析】(Ⅰ) 设被抽取的点击量（万次）在$[0,1],(1,50],(50,100],(100,200]$的事实和新闻的条数分别为$m,n,p,q$，则$\frac{m}{20}=\frac{n}{100}=\frac{p}{60}=\frac{q}{20}=\frac{10}{200}$，　………………2 分

所以$m=1,n=5,p=3,q=1$，则点击量超过 50 万次的条数为 4 条；　………………5 分

(Ⅱ) 由题意知，根据 2020 年度的频率估计得出：

奖金（元）	0	200	500	1000
条数（元）	2	10	60	2

………………9 分

则$200\times10+500\times6+1000\times2=7000$，　………………11 分

所以估计该作者在 2021 年 5 月可以得到的奖金为 7000 元.　………………12 分

18.【解析】(Ⅰ) 在ΔBCD中，由正弦定理知，$\frac{BD}{\sin\angle BCD}=\frac{CD}{\sin\angle CBD}$，　……………2 分

所以$BD\cdot\sin\angle CBD=CD\cdot\sin\angle BCD$，

因为$\angle BCD=\frac{3\pi}{4}$，$BD=\sqrt{5}CD=\sqrt{10}$　……………………3 分

即$\sin\angle CBD=\frac{\sqrt{10}}{10}$.　……………………5 分

(Ⅱ) 因为$\sin\angle CBD=\frac{\sqrt{10}}{10}$，所以$\cos\angle CBD=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，　……………………6 分

所以$\sin\angle ABD=\sin(\frac{\pi}{4}-\angle CBD)=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

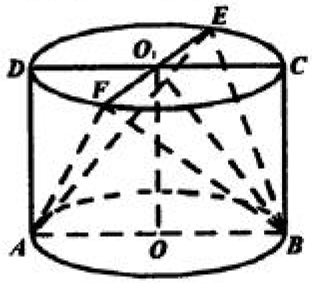
所以$\cos\angle ABD=\frac{2\sqrt{5}}{5}$， ……………………9 分

因为$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot BD\cdot\sin\angle ABD=4$，所以$AB=4\sqrt{2}$， ……………………10 分

所以$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cdot\cos\angle ABD=10$，所以$AD=\sqrt{10}$ ……………………12 分

19.【解析】（Ⅰ）连接BO_1，在圆柱中，因为$EF\perp CD$，$EF\perp BC$，$BC\cap CD=C$，

所以$EF\perp$平面$ABCD$， ……………………4 分



$BO_1\subseteq$平面$ABCD$，所以$EF\perp BO_1$， ……………………5 分

又因为O_1为EF的中点，所以$BE=BF$． ……………………6 分

（Ⅱ）因为$AB=2$，$BC=\sqrt{3}$，所以$S_{\Delta AO_1B}=\sqrt{3}$， …………7 分

设$\angle EO_1C=\theta$，$V_{A-BEF}=V_{F-AO_1B}+V_{E-AO_1B}=2V_{E-AO_1B}$， ……………………9 分

因为$V_{A-BEF}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，所以$V_{E-AO_1B}=\frac{1}{3}S_{\Delta AO_1B}\times O_1E\times\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$， ……………………10 分

所以$O_1E\times\sin\theta=1$，因为$O_1E=1$，所以$\sin\theta=1$，

所以$\angle EO_1C=\frac{\pi}{2}$． ……………………12 分

20．【解析】（Ⅰ）由题意设直线l_1的方程为$y+2=k(x-1)$，

由$\begin{cases}y+2=k(x-1)\\x^2=4y\end{cases}$，得到：$x^2-4kx+4k+8=0$ ……………………2 分

由题意知$\Delta>0$，所以$k^2-k-2>0$，即$k<-1$或$k>2$ ……………………4 分

因为$k>0$，所以k的取值范围为$(2,+\infty)$． ……………………5 分

（Ⅱ）设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),M(x_3,y_3),N(x_4,y_4)$，

因为$x_0^2e^{x_0}=a$，所以$2\ln x_0+x_0=\ln a$.

则$h(x_0)=x_0e^{x_0}-1-2a\ln x_0-ax_0=a-1-a\ln a\geq 0$，……………………10分

令$m(a)=a-1-a\ln a$，$a\in(0,+\infty)$，则$m'(a)=-\ln a$，所以$a\in(0,1)$时，$m'(a)>0$，$a\in(1,+\infty)$时，$m'(a)<0$，所以$m(a)\leq m(1)=0$，所以$a=1$. ……………………12分

22.【解析】(Ⅰ)曲线C_1的直角坐标方程为$x^2+y^2-2x-3=0$，……………………2分

所以曲线C_1的极坐标方程为$\rho^2-2\rho\cos\theta-3=0$. ……………………4分

(Ⅱ)因为曲线C_2的极坐标方程为$\theta=\theta_0$，由$\begin{cases}\rho^2-2\rho\cos\theta-3=0\\ \theta=\theta_0\end{cases}$，

得到$\rho^2-2\rho\cos\theta_0-3=0$，……………………6分

设$|OA|=|\rho_A|$，$|OB|=|\rho_B|$，则$\rho_A+\rho_B=2\cos\theta_0$，$\rho_A\cdot\rho_B=-3$，

则ρ_A,ρ_B异号，不妨设$\rho_A>0,\rho_B<0$，

则$|OA|+|OB|=|\rho_A-\rho_B|=\sqrt{(\rho_A+\rho_B)^2-4\rho_A\rho_B}=\sqrt{4\cos^2\theta_0+12}$，……………………8分

所以$\frac{1}{|OA|}+\frac{1}{|OB|}=\frac{|OA|+|OB|}{|OA||OB|}=\frac{\sqrt{4\cos^2\theta_0+12}}{|\rho_A\rho_B|}=\frac{\sqrt{4\cos^2\theta_0+12}}{3}=\frac{4}{3}$，

则$\cos\theta_0=\pm1$，因为$\theta_0\in[0,\pi)$，所以$\theta_0=0$，

所以曲线C_2的直角坐标方程为$y=0$. ……………………10分

23.【解析】(Ⅰ)因为$f(x)=|x-3|+2|x-1|=\begin{cases}5-3x & x<1\\ x+1 & 1\leq x\leq 3\\ 3x-5 & x>3\end{cases}$，……………………3分

所以当$x=1$时，$f(x)_{\min}=m=2$，……………………5分

(Ⅱ)因为$m=2$，所以$a+2b=2$，则$a+2(b+t)=2t+2$，……………6分

又因为$a+2(b+t)\geq 2\sqrt{2a(b+t)}$，所以$2t+2\geq 2\sqrt{2a(b+t)}$，

则$at+ab=a(b+t)\leq\frac{(t+1)^2}{2}$，所以$\frac{(t+1)^2}{2}=2$，则$t=1$或$t=-3$（舍），

……………9分

当且仅当$a=2(b+1)$，即$a=2,b=0$时，等号成立.

由（Ⅰ）知 $x_1+x_2=4k$ ……………………6 分

由题意设直线 l_2 的方程为 $y+2=-k(x-1)$，

由 $\begin{cases} y+2=-k(x-1) \\ x^2=4y \end{cases}$，得到：$x^2+4kx-4k+8=0$， ……………………8 分

所以 $x_3+x_4=-4k$， ……………………9 分

因为 $k_{AM}=\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}=\dfrac{x_3^{\ 2}-x_1^{\ 2}}{4(x_3-x_1)}=\dfrac{x_3+x_1}{4}$， ……………………10 分

同理可得：$k_{BN}==\dfrac{x_4+x_2}{4}$，

所以 $k_{AM}+k_{BN}=\dfrac{x_3+x_1}{4}+\dfrac{x_4+x_2}{4}=0$， ……………………11 分

即直线 AM、直线 BN 及 y 轴围成等腰三角形. ……………………12 分

21.【解析】（Ⅰ）因为 $f(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x^2}$，所以 $f(x)=\dfrac{x^2\mathrm{e}^x-1}{x^2}$， ……………………1 分

令 $g(x)=x^2\mathrm{e}^x-1$，所以 $g'(x)=x(x+2)\mathrm{e}^x$， ……………………2 分

当 $x\in(-\infty,-2)$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递增；

当 $x\in(-2,0)$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,-2)$ 上单调递减；

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增； ……………………4 分

因为 $g(-2)=4\cdot\mathrm{e}^{-2}-1<0$，$g(0)=-1<0$，$g(1)=\mathrm{e}-1>0$，

所以 $g(x)$ 有且只有一个零点，即 $f(x)$ 有且只有一个零点. ……………………5 分

（Ⅱ）因为 $f(x)\geq\dfrac{2a\ln x}{x^2}+\dfrac{a}{x}$，

所以 $\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x^2}\geq\dfrac{2a\ln x}{x^2}+\dfrac{a}{x}$，则 $x^2\mathrm{e}^x-1-2a\ln x-ax\geq0$， ……………………6 分

令 $h(x)=x^2\mathrm{e}^x-1-2a\ln x-ax, x\in(0,+\infty)$，所以 $h'(x)=\dfrac{(x+2)(x^2\mathrm{e}^x-a)}{x}$， ………7 分

当 $a\leq0$ 时，则 $h'(x)>0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

又因为 $h(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-1-2a\ln\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}a=\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-1-a(\dfrac{1}{2}-\ln4)<0$，所以 $h(x)>0$ 不成立.

……………………8 分

当 $a>0$ 时，由（1）知，函数 $y=x^2\mathrm{e}^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则存在 $x_0\in(0,+\infty)$ 使得 $x_0^{\ 2}\mathrm{e}^{x_0}=a$，

则当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h'(x)<0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，

所以 $h(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增；

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 〞专业、专注、有态度 〞的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。