绝密★启用并使用完毕前

2022年4月高考模拟考试

数学试题

本试卷共4页，22题，全卷满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.已知 i 为虚数单位，若复数 $z=a^2-1+(a+1)i$ 为纯虚数，则实数 a 的值为

A.0　　B.1　　C.-1　　D.-1 或 1

2.已知集合 $A=\{1,2\}$，$B=\{2,4\}$，$C=\{z|z=x^y,x\in A,y\in B\}$，则 C 中元素的个数为

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

3.“$a=3$”是“直线 $ax+y-3=0$ 与 $3x+(a-2)y+4=0$ 平行”的

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　D.既不充分又不必要条件

4.已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-1, & x\leqslant 0,\\ x^{\frac{1}{2}}, & x>0,\end{cases}$ 若 $f(m)=3$，则 m 的值为

A.$\sqrt{3}$　　B.2　　C.9　　D.2 或 9

5.$(2+x)(x+\frac{1}{x})^4$ 的展开式中，常数项为

A.2　　B.6　　C.8　　D.12

6.济南市洪家楼天主教堂于2006年5月被国务院列为全国重点文物保护单位.它是典型的哥特式建筑.哥特式建筑的特点之一就是窗门处使用尖拱造型，其结构是由两段不同圆心的圆弧组成的对称图形.如图2，$\overset{\frown}{AC}$ 和 $\overset{\frown}{BC}$ 所在圆的圆心都在线段 AB 上，若 $\angle ACB=\theta$ rad，$|AC|=b$，则 $\overset{\frown}{AC}$ 的长度为

A.$\dfrac{\theta b}{2\sin\frac{\theta}{2}}$　　B.$\dfrac{\theta b}{2\cos\frac{\theta}{2}}$

C.$\dfrac{\theta b}{\sin\frac{\theta}{2}}$　　D.$\dfrac{2\theta b}{\cos\frac{\theta}{2}}$


图1

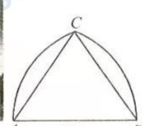
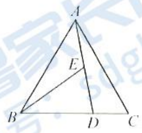


图2

7.如图，$\triangle ABC$ 是边长为3的等边三角形，D 在线段 BC 上，且 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，$E$ 为线段 AD 上一点，若 $\triangle ABE$ 与 $\triangle ACD$ 的面积相等，则 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的值为



A. $\frac{1}{4}$　　　　B. $-\frac{1}{4}$

C. $\frac{3}{4}$　　　　D. $-\frac{3}{4}$

8.已知数列 $\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{1}{2},\frac{3}{1},\frac{2}{2},\frac{1}{3},\frac{4}{1},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\cdots$，其中每一项的分子和分母均为正整数.第一项是分子与分母之和为2的有理数；接下来两项是分子与分母之和为3的有理数，并且从大到小排列；再接下来的三项是分子与分母之和为4的有理数，并且从大到小排列，依次类推.此数列第 n 项记为 a_n，则满足 $a_n=5$ 且 $n\geqslant 20$ 的 n 的最小值为

A.47　　B.48　　C.57　　D.58

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9.袋中装有除颜色外完全相同的1个红球和2个白球，从袋中不放回的依次抽取2个球.记事件 $A=$"第一次抽到的是白球"，事件 $B=$"第二次抽到的是白球"，则

A.事件 A 与事件 B 互斥　　　　B.事件 A 与事件 B 相互独立

C. $P(B)=\frac{2}{3}$　　　　D. $P(A\mid B)=\frac{1}{2}$

10.下列不等关系中一定成立的是

A. $\log_3 2<\log_2 3$　　　　B. $(\frac{1}{5})^{[illegible]}<(\frac{1}{2})^{[illegible]}$

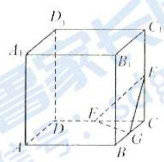
C. $(1+n)^{\frac{1}{2}}<1+\frac{n}{2},n\in\mathbf{N}$　　　　D. $2^n>n^2,n\in\mathbf{N}$

11.过抛物线 $y^2=4x$ 焦点 F 的直线交抛物线于 A，B 两点（A 在第一象限），M 为线段 AB 的中点，M 在抛物线的准线 l 上的射影为点 N，则下列说法正确的是

A. $|AB|$ 的最小值为4　　　　B. $NF\perp AB$

C. $\triangle NAB$ 面积的最小值为6　　　　D.若直线 AB 的斜率为 $\sqrt{3}$，则 $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$

12.在棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F，G 分别为线段 CC_1，CD，CB 上的动点（E，F，G 均不与点 C 重合），则下列说法正确的是



A.存在点 E，F，G，使得 $A_1E\perp$ 平面 EFG

B.存在点 E，F，G，使得 $\angle FEG+\angle EFG+\angle EGC=\pi$

C.当 $A_1C\perp$ 平面 EFG 时，三棱锥 A_1-EFG 与 $C-EFG$ 体积之和的最大值为 $\frac{1}{2}$

D.记 CE，CF，CG 与平面 EFG 所成的角分别为 α，β，γ，则 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.2022 年 4 月 24 日是第七个“中国航天日”，今年的主题是“航天点亮梦想”.某校组织学生参与航天知识竞答活动，某班 8 位同学成绩如下：7，6，8，9，8，7，10，m .若去掉 m ，该组数据的第 25 百分位数保持不变，则整数 $m(1 \leqslant m \leqslant 10)$ 的值可以是______（写出一个满足条件的 m 值即可）.

14.已知 F_1，F_2 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，点 P 在双曲线上，若 $PF_2 \perp F_1F_2$，$\angle PF_1F_2=30^\circ$，则双曲线的离心率为______.

15.在高为 2 的直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB \perp AC$ ，若该直三棱柱存在内切球，则底面 $\triangle ABC$ 周长的最小值为______.

16.已知函数 $f(x)=|\ln x|+ax+\frac{a}{x}(a>0)$ ，则函数 $f(x)$ 的最小值为______；若关于 x 的方程 $e^x+e^{-x}-|\frac{\ln a-\ln x}{a}|-\frac{a}{x}=0$ 有且仅有一个实根，则实数 a 的取值范围是______.

（本小题第一空 2 分，第二空 3 分）

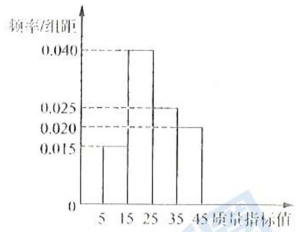
四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

从某企业的某种产品中随机抽取 100 件，测量这些产品的一项质量指标值，由测量结果制成如图所示的频率分布直方图.

（1）求这 100 件产品质量指标值的样本平均数 $\bar{x}$（同一组数据用该区间的中点值作代表）；

（2）已知某用户从该企业购买了 3 件该产品，用 X 表示这 3 件产品中质量指标值位于$[35,45]$内的产品件数，用频率代替概率，求 X 的分布列.



18.（12 分）

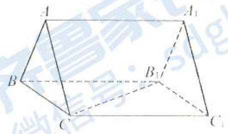
已知 $\triangle ABC$ 内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c ，$A+C=2B$ ，$\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a$.

（1）求边 c ；

（2）若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，求 a 的取值范围.

19.(12 分)

在底面为正三角形的三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，平面 $ABC\perp$ 平面 BCC_1B_1，$\angle CBB_1=60^\circ$，$AA_1=2AB=4$.



(1)证明：$B_1C\perp A_1C_1$；

(2)求二面角 $C-AB-A_1$ 的余弦值.

20.(12 分)

已知 $\{a_n\}$ 是递增的等差数列，$a_1+a_5=18$，a_1,a_3,a_9 分别为等比数列 $\{b_n\}$ 的前三项.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2)删去数列 $\{b_n\}$ 中的第 a_i 项(其中 $i=1,2,3,\cdots$)，将剩余的项按从小到大的顺序排成新数列 $\{c_n\}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

21.(12 分)

已知椭圆 C 的焦点坐标为 $F_1(-1,0)$ 和 $F_2(1,0)$，且椭圆经过点 $G(1,\frac{3}{2})$.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)若 $T(1,1)$，椭圆 C 上四点 M,N,P,Q 满足 $\overrightarrow{MT}=3\overrightarrow{TQ}$，$\overrightarrow{NT}=3\overrightarrow{TP}$，求直线 MN 的斜率.

22.(12 分)

已知函数 $f(x)=e^{ax}-a$，$a>0$.

(1)若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线在 y 轴上的截距为 -1，求 a 的值；

(2)是否存在实数 t，使得有且仅有一个实数 a，当 $x>0$ 时，不等式 $f(x)\geqslant tx$ 恒成立？若存在，求出 t,a 的值；若不存在，说明理由.

2022年高三模拟考试

数学试题参考答案

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	C	A	C	D	A	D	C

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

题号	9	10	11	12
答案	CD	ABC	ABD	ACD

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．7或8或9或10（填上述4个数中任意一个均可）；

14．$\sqrt{3}$；15．$6+4\sqrt{2}$；16．$2a$，$(\frac{1}{e},+\infty)$（第一空2分，第二空3分）．

四、解答题：共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.【解析】

（1）由已知得：

$$\bar{x}=10\times0.015\times10+20\times0.040\times10+30\times0.025\times10+40\times0.020\times10=25.$$

（2）因为购买一件产品，其质量指标值位于$[35,45]$内的概率为0.2，

所以 $X\sim B(3,0.2)$，所以 $X=0,1,2,3$．

$P(X=0)=(1-0.2)^3=0.512$，

$P(X=1)=C_3^1\times0.2\times(1-0.2)^2=0.384$，

$P(X=2)=C_3^2\times0.2^2\times(1-0.2)=0.096$，

$P(X=3)=0.2^3=0.008$．

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	0.512	0.384	0.096	0.008

18.【解析】

（1）因为 $A+C=2B$，$A+B+C=\pi$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$；

因为 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac=\frac{\sqrt{3}}{4}a$，所以 $c=1$，

（2）在△ABC 中，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，

由（1）知 $B=\frac{\pi}{3}$，$c=1$，代入上式得：

$$a=\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{\sin(C+\frac{\pi}{3})}{\sin C}=\frac{\frac{1}{2}\sin C+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C}{\sin C}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2\tan C},$$

因为 △ABC 为锐角三角形，所以 $C\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$，所以 $\tan C\in(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$，

所以 $a=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2\tan C}\in(\frac{1}{2},2)$．

由（1）知 $B=\frac{\pi}{3}, c=1$，代入上式得：

$$a=\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{\sin(C+\frac{\pi}{3})}{\sin C}=\frac{\frac{1}{2}\sin C+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C}{\sin C}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2\tan C},$$

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，所以 $C\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$，所以 $\tan C\in(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$，

所以 $a=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2\tan C}\in(\frac{1}{2},2)$．

19.【解析】

（1）因为 $\angle CBB_1=60$，$AA_1=2AB=4$，

所以 $B_1C^2=BC^2+BB_1^2-2\cdot BC\cdot BB_1\cos\angle CBB_1=12$，则 $B_1C=2\sqrt{3}$，

所以 $B_1C^2+B_1C_1^2=CC_1^2$，即 $B_1C\perp B_1C_1$；

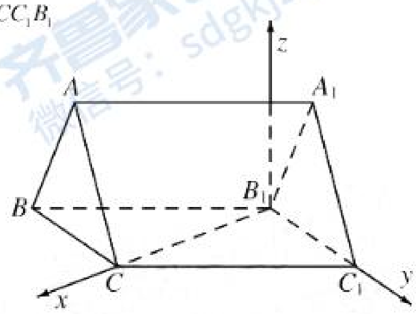
因为 平面 ABC // 平面 $A_1B_1C_1$，平面 $ABC\perp$ 平面 BCC_1B_1

所以 平面 $A_1B_1C_1\perp$ 平面 BCC_1B_1，

因为 平面 $A_1B_1C_1\cap$ 平面 $BCC_1B_1=B_1C_1$，

所以 $B_1C\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，又 $A_1C_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，

所以 $B_1C\perp A_1C_1$．



（2）如图，以 B_1 为原点，B_1C，B_1C_1 所在直线分别为 x 轴，

y 轴建立空间直角坐标系，

则 $B_1(0,0,0)$，$C(2\sqrt{3},0,0)$，$B(2\sqrt{3},-2,0)$，$A_1(0,1,\sqrt{3})$，

所以 $\overrightarrow{B_1A_1}=(0,1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{B_1B}=(2\sqrt{3},-2,0)$，

设平面 ABA_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，

- 2 -

则 $\begin{cases} \boldsymbol{n}_1 \cdot \overrightarrow{B_1A_1} = 0 \\ \boldsymbol{n}_1 \cdot \overrightarrow{B_1B} = 0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} y+\sqrt{3}z=0 \\ 2\sqrt{3}x-2y=0 \end{cases}$，取 $x=1$，则 $\boldsymbol{n}_1=(1,\sqrt{3},-1)$，

又因为 x 轴 $\perp$ 平面 ABC，所以 取平面 ABC 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=(1,0,0)$，

所以 $\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

由图可知，二面角为锐角，

所以 二面角 $C-AB-A_1$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$．

20.【解析】

（1）设数列$\{a_n\}$的公差为$d(d>0)$，数列$\{b_n\}$的公比为q，

由已知得 $\begin{cases} a_1+a_1+4d=18 \\ (a_1+2d)^2=a_1(a_1+8d) \end{cases}$，解得 $a_1=3, d=3$，所以$a_n=3n$；

所以 $b_1=a_1=3, q=\dfrac{a_3}{a_1}=3$，所以 $b_n=3^n$.

（2）由题意可知新数列$\{c_n\}$为：$b_1, b_2, b_4, b_5, \cdots$，

则当n为偶数时 $S_n=(b_1+b_4+\cdots+b_{3(\frac{n}{2})-2})+(b_2+b_5+\cdots+b_{3(\frac{n}{2})-1})$

$=\dfrac{3(1-27^{\frac{n}{2}})}{1-27}+\dfrac{3^2(1-27^{\frac{n}{2}})}{1-27}=\dfrac{6(27^{\frac{n}{2}}-1)}{13}$，

则当n为奇数时

$S_n=S_{n-1}+c_n=S_{n-1}+b_{3(\frac{n+1}{2})-2}=S_{n-1}+b_{\frac{3n-1}{2}}=\dfrac{6(27^{\frac{n-1}{2}}-1)}{13}+3^{\frac{3n-1}{2}}$，

综上：$S_n=\begin{cases} \dfrac{6(27^{\frac{n}{2}}-1)}{13}, & n\text{为偶数} \\ \dfrac{6(27^{\frac{n-1}{2}}-1)}{13}+3^{\frac{3n-1}{2}}, & n\text{为奇数} \end{cases}$.

21.【解析】

（1）由题意可知，$c=1$，

设椭圆方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-1}=1$，将点$(1,\dfrac{3}{2})$代入椭圆方程，

解得 $(a^2-4)(4a^2-1)=0$，所以 $a^2=\dfrac{1}{4}$（舍），$a^2=4$，

所以 椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$．

（2）设$M(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$N(x_3,y_3)$，$P(x_4,y_4)$，$T(1,1)$，

因为 $MT=3TQ$，所以 $\begin{cases}1-x_1=3(x_2-1)\\1-y_1=3(y_2-1)\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_2=\frac{4-x_1}{3}\\y_2=\frac{4-y_1}{3}\end{cases}$，

又$M(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$都在椭圆上，

所以 $\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1$，$\frac{1}{4}\left(\frac{4-x_1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{4-y_1}{3}\right)^2=1$，

即 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1 & \cdots\cdots①\\\frac{1}{4}(4-x_1)^2+\frac{1}{3}(4-y_1)^2=9 & \cdots\cdots②\end{cases}$，

②－① 得，$\frac{1}{4}(4-2x_1)\cdot4+\frac{1}{3}(4-2y_1)\cdot4=8$，

即 $\frac{1}{4}(2-x_1)+\frac{1}{3}(2-y_1)=1\cdots\cdots③$，

又$NT=3TP$，同理得 $\frac{1}{4}(2-x_3)+\frac{1}{3}(2-y_3)=1\cdots\cdots④$

④－③ 得 $\frac{1}{4}(x_1-x_3)+\frac{1}{3}(y_1-y_3)=0$，

所以 $k_{MN}=\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}=\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}=-\frac{3}{4}$．

22.【解析】

（1） 由题意 $f'(x)=ae^{ax}$，$f'(1)=ae^{a}$， 又因为 $f(1)=e^{a}-a$，

所以 $f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-e^{a}+a=ae^{a}(x-1)$，

即 $y=ae^{a}x-ae^{a}+e^{a}-a$，

由题意知 $-ae^{a}+e^{a}-a=-1$，$(e^{a}+1)(1-a)=0$，

因为 $e^{a}+1>0$，所以 $1-a=0$，$a=1$.

（2）$\forall x>0$，$f(x)\geqslant tx$ 恒成立，即 $e^{ax}-a-tx\geqslant 0$ 恒成立.

令 $g(x)=e^{ax}-a-tx\ (x>0)$，$g'(x)=ae^{ax}-t$，

- 4 -

当$t\leq 0$时，$g'(x)=ae^{ax}-t>0$恒成立，

所以 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

故 当$x>0$时，$g(x)>g(0)=1-a\geqslant 0$，只需$a\leq 1$即可.

与有且仅有一个实数a矛盾，不符合题意；

当$t>0$时，令$g'(x_0)=0$，得$x_0=\frac{1}{a}\ln\frac{t}{a}$，

当$x_0\leq 0$时，即$t\leq a$时，$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

则$g(x)>g(0)=1-a\geqslant 0$；

当$x_0>0$时，即$t>a$时，

$g(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，在$(x_0,+\infty)$上单调递增，

所以 $g(x)\geqslant g(x_0)=\frac{t}{a}-\frac{t}{a}\ln\frac{t}{a}-a\geqslant 0$，

综上 $a\leq 1,0<t\leq a$ ①，$1-\ln\frac{t}{a}-\frac{a^2}{t}\geqslant 0,t>a$ ②；

由题意知，上述不等式关于a有唯一解.

（i）若$t>1$，对于①式，$t\leq a\leq 1$无解.

对于②式，令$\varphi(a)=1-\ln\frac{t}{a}-\frac{a^2}{t}$，$0<a<t$，

$\varphi'(a)=\frac{1}{a}-\frac{2a}{t}=\frac{t-2a^2}{at}$，$\varphi'(a)=0$时，$a=\sqrt{\frac{t}{2}}$，

所以 $\varphi(a)$在$(0,\sqrt{\frac{t}{2}})$上单调递增，在$(\sqrt{\frac{t}{2}},t)$上单调递减，

故只需$\varphi(\sqrt{\frac{t}{2}})=1-\ln\frac{t}{\sqrt{\frac{t}{2}}}-\frac{\frac{t}{2}}{t}=0$即可，

解得 $t=\frac{e}{2}$，此时$a=\frac{\sqrt{e}}{2}$，符合题意；

（ii）若$t=1$， 对于①式，$a=1$，

对于②式，$1-\ln\frac{1}{a}-a^2\geqslant 0$，当$a=\frac{1}{2}$时成立，不合题意；

（iii）若$0<t<1$，对于①式，$t\leq a\leq 1$时均成立，不合题意；

综上所述，当$t=\frac{e}{2}$时，存在唯一的$a=\frac{\sqrt{e}}{2}$，使得$f(x)\geqslant tx(x>0)$恒成立.

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索