绵阳市高中 2019 级第一次诊断性考试

理科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．

CDBCC　　AABDD　　AD

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．7　　14．2　　15．$\frac{3}{2}$　　16．$[1，2\sqrt{2}]$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．

17．解：（1）$f(x)=\sqrt{3}(1+\cos 2\omega x)+\sin 2\omega x-\sqrt{3}$

$=\sqrt{3}\cos 2\omega x+\sin 2\omega x$

$=2\sin(2\omega x+\frac{\pi}{3})$．……………………………………4 分

$\because$ 相邻对称轴间距离为 $\frac{\pi}{2}$，

$\therefore$ 函数的最小正周期 $T=\pi$，即 $\frac{2\pi}{2|\omega|}=\pi(\omega>0)$，解得 $\omega=1$，

$\therefore f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$．……………………………………6 分

由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，得 $-\frac{5\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{12}+k\pi\,(k\in Z)$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $[0，\frac{\pi}{2}]$ 上的单调递增区间为 $[0，\frac{\pi}{12}]$．……………………8 分

（2）将函数 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象向左平移 $\varphi(0<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 个单位后得

$g(x)=2\sin[2(x+\varphi)+\frac{\pi}{3}]=2\sin(2x+2\varphi+\frac{\pi}{3})$，

$\because g(x)$ 为偶函数，

$\therefore g(0)=\pm 2$，即 $\sin(2\varphi+\frac{\pi}{3})=\pm 1$，……………………………………10 分

$\therefore 2\varphi+\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，即 $\varphi=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}(k\in Z)$．

又 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore \varphi=\frac{\pi}{12}$．……………………………………12 分

18．解：（1）$\because S_{n+1}=3S_n+2$ ①，

$\therefore S_2=3S_1+2$，即 $a_1+a_2=3a_1+2$．

$\because a_1=2$，$\therefore a_2=6$．……………………………………2 分

4

当$n\geqslant 2$时，$S_n=3S_{n-1}+2$．②

由①－②得$a_{n+1}=3a_n$，即$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=3(n\geqslant 2)$．又$\dfrac{a_2}{a_1}=3$，

∴数列$\{a_n\}$是以首项为2，公比为3的等比数列．………………………… 5分

$\therefore a_n=2\times 3^{n-1}$．………………………………………………………………6分

（2）由$n\cdot a_n=2n\cdot 3^{n-1}$，……………………………………………………7分

得$T_n=2(1\times 3^0+2\times 3^1+\cdots+n\times 3^{n-1})$ ①

$3T_n=2(1\times 3^1+2\times 3^2+\cdots+n\times 3^n)$ ②

由①－②，得$-2T_n=2(3^0+3^1+3^2+\cdots+3^{n-1}-n\cdot 3^n)$，

$$-2T_n=2\times\frac{1-3^n}{1-3}-2n\cdot 3^n=(1-2n)3^n-1.$$

$\therefore T_n=(n-\dfrac{1}{2})3^n+\dfrac{1}{2}$．………………………………………………12分

19．解：选择条件①：由$b\tan C=(2a-b)\tan B$，得$\dfrac{b\sin C}{\cos C}=\dfrac{(2a-b)\sin B}{\cos B}$，

由正弦定理可得，$\sin B\sin C\cos B=(2\sin A-\sin B)\sin B\cos C$，

$\therefore \sin C\cos B=2\sin A\cos C-\sin B\cos C$，

$\therefore 2\sin A\cos C=\sin C\cos B+\sin B\cos C=\sin(C+B)=\sin A$．

$\because C\in(0,\ \pi)$，$\therefore \sin C\neq 0$，

$\therefore \cos A=\dfrac{1}{2}$，又$A\in(0,\dfrac{\pi}{2})$．$\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$．

选择条件②：由正弦定理可得，$2\sin C\cos B=2\sin A-\sin B$，

又$\sin A=\sin(C+B)$，

$\therefore 2\sin C\cos B=2\sin(C+B)-\sin B=2(\sin C\cos B+\cos C\sin B)-\sin B$，

化简整理得$2\cos C\sin B=\sin B$，

由$\sin B\neq 0$，$\therefore \cos C=\dfrac{1}{2}$，

又$0<C<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore C=\dfrac{\pi}{3}$．

选择条件③：由已知得，$b^2+a^2-c^2=ac\cos A+a^2\cos C$，

由余弦定理，得$b^2+a^2-c^2=2ab\cos C$，

$\because b^2+c^2-a^2=ac\cos C+c^2\cos A$，

$\therefore 2ab\cos C=ac\cos A+a^2\cos C$，

$\because a>0$，$\therefore 2b\cos C=c\cos A+a\cos C$，

由正弦定理，有$2\sin B\cos C=\sin C\cos A+\sin A\cos C=\sin(A+C)=\sin B$，

$\because \sin B \neq 0$，$\therefore \cos C=\frac{1}{2}$.

又 $C\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\therefore C=\frac{\pi}{3}$. ……………………………………………………4 分

（1）证明：由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=2\sqrt{3}$，

$\therefore a=2\sqrt{3}\sin A$，

$\therefore a=2\sqrt{3}\sin A=2\sqrt{3}\sin(B+\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}\sin B+3\cos B$，得证. ……………………………6 分

（2）由 $AP=2PB$ 及 $AB=3$，可得 $PB=1$，

在△PBC 中，由余弦定理可得，

$CP^2=a^2+1-2a\cos B=(\sqrt{3}\sin B+3\cos B)^2+1-2(\sqrt{3}\sin B+3\cos B)\cos B$

$=4+2\sqrt{3}\sin 2B$. ……………………………………………………………………9 分

$\because$△ABC 为锐角三角形，$\therefore B\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$，即 $2B\in(\frac{\pi}{3},\pi)$.

当 $2B=\frac{\pi}{2}$，即 $B=\frac{\pi}{4}$ 时，CP^2 取最大值为 $4+2\sqrt{3}$.

$\therefore$线段 CP 的长度的最大值为 $1+\sqrt{3}$. ……………………………………12 分

20．解：（1）由题意得 $f'(x)=-x^2+2ax+3a^2=-(x-3a)(x+a)$，……………………1 分

当 $a=-1$ 时，$f'(x)=-(x-1)(x+3)$，$x\in[-4，2]$，

由 $f'(x)>0$，解得 $-3<x<1$；

由 $f'(x)<0$，解得 $-4\leqslant x<-3$ 或 $1<x\leqslant 2$，…………………………………………3 分

$\therefore$函数 $f(x)$ 在区间 $(-3，1)$ 上单调递增，在区间 $[-4，-3)$，$(1，2]$ 单调递减.

又 $f(-4)=-\frac{25}{3}$，$f(-3)=-\frac{32}{3}$，$f(1)=0$，$f(2)=-\frac{7}{3}$，

$\therefore$函数 $f(x)$ 在区间 $[-4，2]$ 上的最大值为 0，最小值为 $-\frac{32}{3}$. ………………6 分

（2）存在实数 m，使不等式 $f(x)<0$ 的解集恰好为 $(m，+\infty)$，

等价于函数 $f(x)$ 只有一个零点.

$\because f'(x)=-x^2+2ax+3a^2=-(x-3a)(x+a)$，

i)当 $a<0$ 时，由 $f'(x)>0$，解得 $3a<x<-a$，

$\therefore$函数 $f(x)$ 在区间 $(3a，-a)$ 上单调递增；

由 $f'(x)<0$，解得 $x<3a$ 或 $x>-a$，

$\therefore$函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty，3a)$，$(-a，+\infty)$ 上单调递减.

又 $f(0)=-\frac{5}{3}<0$，

$\therefore$只需要 $f(-a)<0$，解得 $-1<a<0$.

∴实数 a 的取值范围为 $-1<a<0$.

ii)当 $a=0$ 时，显然 $f(x)$ 只有一个零点成立. ……………………………………10 分

iii) 当 $a>0$ 时，由 $f'(x)>0$，解得 $-a<x<3a$，

即 $f(x)$ 在区间 $(-a,\ 3a)$ 上单调递增；

由 $f'(x)<0$，解得 $x<-a$ 或 $x>3a$，

即函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,\ -a)$，$(3a,\ +\infty)$ 上单调递减；

又 $f(0)=-\dfrac{5}{3}<0$，∴只需要 $f(3a)<0$，解得 $0<a<\dfrac{\sqrt[3]{5}}{3}$.

综上：实数 a 的取值范围是 $(-1,\dfrac{\sqrt[3]{5}}{3})$. ……………………………………12 分

21. 解：(1) 由题意得 $f'(x)=(x+1)e^x-b(\ln x+1)-x$. ……………………………1 分

∵函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1,\ f(1))$ 处的切线的斜率为 $2e-3$，

∴ $f'(1)=2e-b-1=2e-3$，解得 $b=2$. ……………………………………3 分当 $x>1$

时，$f(x)>xe^x-\dfrac{3}{2}x^2+1$ 等价于 $x^2-2x\ln x-1>0$，即 $x-2\ln x-\dfrac{1}{x}>0$.

令 $F(x)=x-2\ln x-\dfrac{1}{x}$，

则 $F'(x)=1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}>0$.

∴函数 $F(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

∴ $F(x)>F(1)=0$，

∴当 $x>1$ 时，$f(x)>xe^x-\dfrac{3}{2}x^2+1$. ……………………………………………6 分

(2) 由题得 $g(x)=xe^x-2x\ln x-\dfrac{1}{2}x^2+(4-a)x-1$.

若 $g(x)=f(x)+(4-a)x-1$ 无极值，则 $g'(x)\geq0$ 恒成立或 $g'(x)\leq0$ 恒成立.

i)当 $g'(x)\geq0$ 恒成立时，$g'(x)=(x+1)e^x-2(1+\ln x)-x+4-a\geq0$，

即 $a-2\leq[(x+1)e^x-2\ln x-x]_{\min}$.

令 $h(x)=(x+1)e^x-2\ln x-x$.

∴ $h'(x)=(x+2)e^x-\dfrac{2}{x}-1=(x+2)e^x-\dfrac{(x+2)}{x}=(x+2)(e^x-\dfrac{1}{x})$ $(x>0)$.

令 $\varphi(x)=e^x-\dfrac{1}{x}$，则 $\varphi'(x)=e^x+\dfrac{1}{x^2}>0$，

即 $\varphi(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上单调递增. ……………………………………………8 分

又 $\varphi(\dfrac{1}{2})=\sqrt{e}-2<\sqrt{4}-2=0$，$\varphi(1)=e-1>0$，

$\therefore$存在$x_0\in(\frac{1}{2}，1)$，使得$\varphi(x_0)=e^{x_0}-\frac{1}{x_0}=0$．

$\therefore$当$x\in(0，x_0)$时，$\varphi(x)<0$，即$h'(x)<0$，

$\therefore$函数$h(x)$在区间$(0，x_0)$单调递减．

当$x\in(x_0,+\infty)$时，$\varphi(x)>0$，即$h'(x)>0$，

$\therefore$函数$h(x)$在区间$(x_0,+\infty)$单调递增．

$\therefore$函数$h(x)$的最小值为$h(x_0)=(x_0+1)e^{x_0}-2\ln x_0-x_0$．··································10 分

又$e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，即$x_0=-\ln x_0$，

代入，得$h(x_0)=(x_0+1)e^{x_0}-2\ln x_0-x_0=1+\frac{1}{x_0}+2x_0-x_0=1+x_0+\frac{1}{x_0}$．

又$x_0\in(\frac{1}{2}，1)$，则$h(x_0)==1+x_0+\frac{1}{x_0}\in(3，\frac{7}{2})$．

$\therefore$正整数a的最大值是5．

ii)当$g'(x)\leqslant 0$恒成立时，$g'(x)=(x+1)e^x-2(1+\ln x)-x+1-a\leqslant 0$，

即$a-2\geqslant[(x+1)e^x-2\ln x-x]_{\max}$，

又由（i）知，函数$h(x)$在区间$(x_0,+\infty)$上单调递增．

$\therefore$函数$h(x)$不存在最大值．

综上：正整数a的最大值是5．··································12 分

22．解：（1）曲线C_1的极坐标方程为$\rho=2(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$．··································2 分

设$P(\rho，\theta)$为曲线C_2上的任意一点，

$\therefore\rho=2\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)$．

$\therefore$曲线C_2极坐标方程为$\rho=2\sin\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$．··································5 分

（2）$\because$直线$\theta=\alpha(0<\alpha<\pi，\rho\in\mathbf{R})$与曲线$C_1$，$C_2$分别交于点$A$，$B$(异于极点)，

$\therefore$设$B(\rho_B，\alpha)$，则$A(\rho_A，\alpha)$．

由题意得$\rho_B=2\sin\alpha$，$\rho_A=2$，

$\therefore AB=\rho_A-\rho_B=2-2\sin\alpha$．··································7 分

$\because$点M到直线AB的距离$d=OM\times\sin\alpha=2\sin\alpha$，

$\therefore S_{\triangle AOM}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}(2-2\sin\alpha)\times 2\sin\alpha$

$=2(1-\sin\alpha)\times\sin\alpha\leqslant 2\times\frac{(\sin\alpha+1-\sin\alpha)^2}{4}=\frac{1}{2}$

8

(当且仅当$\sin\alpha=\frac{1}{2}$时，等号成立)．

∴△ABM的面积的最大值为$\frac{1}{2}$． ……………………………………10分

23．解：(1) 由题意得$f(x)=|x+m|-|x-2m|\leqslant|(x+m)-(x-2m)|=|3m|$． ………3分

∵函数$f(x)$的最大值为6，

∴$|3m|=6$，即$m=\pm2$．

∵$m>0$，∴$m=2$． ……………………………………………………5分

(2) 由 (1) 知，$x+y+z=2$，∵$x>0$，$y>0$，$z>0$，

∴$2=x+y+z=(\frac{x}{2}+y)+(\frac{x}{2}+z)$

$\geqslant2\sqrt{\frac{xy}{2}}+2\sqrt{\frac{xz}{2}}$ (当且仅当$\frac{x}{2}=y=z$时，等号成立)． ……………………8分

∴$\sqrt{2}\sqrt{xy}+\sqrt{2}\sqrt{xz}\leqslant2$，

∴$\sqrt{xy}+\sqrt{xz}\leqslant\sqrt{2}$ (当且仅当$x=1$，$y=z=\frac{1}{2}$时，等号成立)． ……………10分

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于中国拔尖人才培养的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户（官方网址：www.zizzs.com）、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承‘’专业、专注、有态度‘’的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+ 大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网 “年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的新高考拔尖人才培养服务平台。