天一大联考
2022—2023 学年高三年级上学期期中考试
文科数学・答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. 答案　D

命题意图　本题考查集合的表示与运算.

解析　$B=\{1,2,3\}$,$\therefore A\cap B=\{2,3\}$.

2. 答案　B

命题意图　本题考查不等式的性质.

解析　不妨取 $a=2,b=1,c=-1$,则$(a-b)c=-1<0$,故 A 错;$a-b=1,a-c=3$,故 C 错误;$b+c=0$ 时不符合要求,故 D 错误.

3. 答案　B

命题意图　本题考查等差数列及其前 n 项和.

解析　$\dfrac{S_6-S_3}{a_2+a_8}=\dfrac{a_6+a_5+a_4}{2a_5}=\dfrac{3a_5}{2a_5}=\dfrac{3}{2}$.

4. 答案　A

命题意图　本题考查半角公式.

解析　$\cos^2\alpha=\dfrac{\cos 2\alpha+1}{2}=\dfrac{2}{3}$,$\because \alpha$ 为第三象限角,$\therefore \cos\alpha=-\sqrt{\dfrac{2}{3}}=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

5. 答案　C

命题意图　本题考查向量的坐标运算.

解析　$\because 2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=(3,7)$,$\therefore |2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|=\sqrt{3^2+7^2}=\sqrt{58}$.

6. 答案　C

命题意图　本题考查等比数列的性质,以及充分、必要条件的判断.

解析　若$\{a_n\}$为递增的等比数列,显然后面的项都比 a_1 大,即 $\forall k\geqslant 2$ 且 $k\in\mathbf{N}^*$,$a_k>a_1$,充分性成立;反过来,若 $\forall k\geqslant 2$ 且 $k\in\mathbf{N}^*$,$a_k>a_1$,即 $a_1q^{k-1}>a_1$(q 为公比),因为 $a_1>0$,所以 $q^{k-1}>1$,所以 $q>1$,从而可得$\{a_n\}$为递增数列,必要性成立.

7. 答案　B

命题意图　本题考查余弦定理和三角形面积公式.

解析　由余弦定理可得 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{4+9-16}{2\times2\times3}=-\dfrac{1}{4}$,所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2C}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$,$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}b^2\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\dfrac{\sqrt{15}}{12}b^2$.

8. 答案　A

命题意图　本题考查不等式的解法.

解析 依题知 $x^2+bx+c=0$ 的根为 $\frac{3-3\sqrt{5}}{2},\frac{3+3\sqrt{5}}{2}$，$\therefore\begin{cases}-b=3,\\c=-9,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}b=-3,\\c=-9,\end{cases}$ $\therefore f(x)\leqslant -27$ 可化为 $x^3-3x^2-9x+27\leqslant 0$，即 $(x-3)^2(x+3)\leqslant 0$，解得 $x=3$，或 $x\leqslant -3$，$\therefore$ 不等式的解集为 $\{x|x\leqslant -3$ 或 $x=3\}$.

9. **答案** A

命题意图 本题考查指数和对数的运算性质.

解析 $\because 2^a=3^b=6^c$，$\therefore a\lg 2=b\lg 3=c\lg 6$，又 $abc\neq 0$，$\therefore \frac{a}{b}=\frac{\lg 3}{\lg 2}$，$\frac{a}{c}=\frac{\lg 6}{\lg 2}=\frac{\lg 2+\lg 3}{\lg 2}=1+\frac{\lg 3}{\lg 2}$，$\therefore \frac{a}{c}=1+\frac{a}{b}$，即 $\frac{a}{c}-\frac{a}{b}=1$.

10. **答案** C

命题意图 本题考查函数的图象与性质.

解析 当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 单调递减，易知线段 AB 与 $f(x)$ 的图象必有交点，不符合题意；当 $a>1$ 时，因为 $f(x)$ 的图象经过点 $(1,0)$，该点在线段 AB 上方，所以由曲线 $y=f(x)$ 在线段 AB 的上方，得 $\begin{cases}\log_a\frac{1}{2}>-8,\\\log_a 2>1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a>2^{\frac{1}{8}},\\a<2,\end{cases}$ 所以 a 的取值范围为 $(2^{\frac{1}{8}},2)$.

11. **答案** D

命题意图 本题考查三角函数的图象与性质.

解析 因为 $f(x)$ 的最小正周期为 π，所以 $\omega=2$. $x=\frac{5\pi}{12}$ 是 $f(x)$ 的一个最大值点，取关于直线 $x=\frac{5\pi}{12}$ 对称的一个周期 $\left(-\frac{\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right)$，$-2+\pi,0,2$ 都在这个周期内，距离 $x=\frac{5\pi}{12}$ 越远的自变量对应的函数值越小. $\left|-2+\pi-\frac{5\pi}{12}\right|=\frac{24-7\pi}{12}$，$\left|0-\frac{5\pi}{12}\right|=\frac{5\pi}{12}$，$\left|2-\frac{5\pi}{12}\right|=\frac{24-5\pi}{12}$，因为 $\frac{5\pi}{12}>\frac{24-5\pi}{12}>\frac{24-7\pi}{12}$，所以 $f(0)<f(2)<f(-2+\pi)=f(-2)$.

12. **答案** C

命题意图 本题考查分段函数的单调性.

解析 令函数 $g(x)=\frac{2}{x}$，$h(x)=\frac{\ln x}{x}$. 要满足条件，必须 $g(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，$h(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递减，且 $g(a)\geqslant h(a)$. 易知 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，可得 $h(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，所以 $a\geqslant e$. $g(x)-h(x)=\frac{2-\ln x}{x}$，则当 $0<x\leqslant e^2$ 时，$g(x)\geqslant h(x)$，当 $x>e^2$ 时，$g(x)<h(x)$，要使 $g(a)\geqslant h(a)$，则 $0<a\leqslant e^2$. 所以 a 的取值范围是 $[e,e^2]$.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. **答案** 32

命题意图 本题考查等比数列的基本性质.

解析 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q，则 $q^2=\frac{a_5}{a_3}=2$，$a_{11}=a_3q^{11-3}=a_3\cdot(q^2)^4=2\times 16=32$.

14. **答案** $\frac{2}{3}$

命题意图 本题考查平面向量的线性运算.

解析 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\frac{1}{\mu}\overrightarrow{AF}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$，$\because E,C,F$ 三点共线，$\therefore \frac{1}{\mu}-\frac{1}{2}=1$，解得 $\mu=\frac{2}{3}$.

15. **答案** $\left[\frac{13}{4},4\right]$

命题意图 本题考查命题的真假，以及函数、方程和不等式的性质.

解析 对于命题 p，$\log_2 x_1+a\in(a-1,a+1)$，$x_2^2+2\in\left(\frac{9}{4},6\right)$，若命题 p 为真，则 $(a-1,a+1)\subseteq\left(\frac{9}{4},6\right)$，即 $\begin{cases}a-1\geqslant\frac{9}{4},\\a+1\leqslant 6,\end{cases}$ 解得 $\frac{13}{4}\leqslant a\leqslant 5$. 对于命题 q，$a+3x_2\in[a,a+3]$，$4^{x_1}\in[1,4]$，若命题 q 为真，则 $a>4$，若命题 q 为假，则 $a\leqslant 4$. 综上可得 a 的取值范围为 $\left[\frac{13}{4},4\right]$.

16. **答案** $\frac{8}{7}$

命题意图 本题考查等差数列和等比数列的性质.

解析 设 $a_2=m$，易知 $m>0$，由 $-1\leqslant m\leqslant d-1\leqslant 3m\leqslant 2d-1\leqslant 9m\leqslant 3d-1$，可得 $\begin{cases}m+1\leqslant d\leqslant 3m+1,\\\frac{3m+1}{2}\leqslant d\leqslant\frac{9m+1}{2},\\\frac{9m+1}{3}\leqslant d,\end{cases}$ 只需 $m+1\leqslant\frac{9m+1}{2}$ 即可，所以 $m\geqslant\frac{1}{7}$. 当 m 取最小值 $\frac{1}{7}$ 时，由不等式组得 $d=\frac{8}{7}$，故 d 的最小值为 $\frac{8}{7}$.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查任意角的三角函数的概念以及三角恒等变换的应用.

解析 （Ⅰ）依题知 $\tan\alpha=-2$，$\tan\beta=\frac{4}{3}$，…………（2 分）

$\therefore \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-2-\frac{4}{3}}{1-2\times\frac{4}{3}}=2$. …………（4 分）

（Ⅱ）由条件得 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\beta=\frac{4}{5}$，$\cos\beta=\frac{3}{5}$，…………（5 分）

$\because$ 角 γ 的终边是 $\angle AOB$（锐角）的平分线，$\therefore \gamma=\frac{\alpha+\beta}{2}$. …………（6 分）

$\therefore \cos 2\gamma=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{3}{5}-\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{4}{5}=-\frac{11\sqrt{5}}{25}$，…………（8 分）

$\therefore \sin^2\gamma=\frac{1-\cos 2\gamma}{2}=\frac{1+\frac{11\sqrt{5}}{25}}{2}=\frac{25+11\sqrt{5}}{50}$. …………（10 分）

18. **命题意图** 本题考查等差数列的性质.

解析 （Ⅰ）因为 $1,a_2,a_3$ 成等比数列，所以 $a_2^2=a_3$，…………（1 分）

所以$(a_1+2)^2=a_1+4$，即$a_1^2+3a_1=0$， ……（3分）

解得$a_1=0$或$a_1=-3$， ……（4分）

所以$a_n=2n-2$或$a_n=2n-5$. ……（6分）

（Ⅱ）由题意知$S_n=na_1+n(n-1)$， ……（7分）

由$S_2+S_6>a_2a_6$，得$2a_1+2+6a_1+30>(a_1+2)(a_1+10)$， ……（9分）

即$a_1^2+4a_1-12<0$，解得$-6<a_1<2$， ……（11分）

即a_1的取值范围是$(-6,2)$. ……（12分）

19. **命题意图** 本题考查正弦定理和余弦定理的应用.

解析 （Ⅰ）在$\triangle ABC$中，由题意知$\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\frac{\sqrt{6}}{3}$， ……（2分）

因为$B=A-\frac{\pi}{2}$，所以$\sin B=\sin\left(A-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos A=\frac{\sqrt{3}}{3}$， ……（4分）

由正弦定理可得$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}=2$. ……（6分）

（Ⅱ）由$B=A-\frac{\pi}{2}$得，$\cos B=\cos\left(A-\frac{\pi}{2}\right)=\sin A=\frac{\sqrt{6}}{3}$， ……（7分）

由$A+B+C=\pi$，得$C=\pi-(A+B)$， ……（8分）

所以$\sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$=\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{3}$. ……（10分）

因此，$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\times\frac{1}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. ……（12分）

20. **命题意图** 本题考查递推公式，等比、等差数列的性质以及错位相减法.

解析 （Ⅰ）当$n=1$时，$S_2=4a_1=4$， ……（1分）

当$n\geqslant2$时，由$S_{n+1}=4a_n$得$S_{n+1}=4S_n-4S_{n-1}$， ……（2分）

$\therefore S_{n+1}-2S_n=2(S_n-2S_{n-1})$，又$\because S_2-2a_1=2$，

$\therefore\{S_{n+1}-2S_n\}$是以2为首项，2为公比的等比数列， ……（4分）

$\therefore S_{n+1}-2S_n=2\times2^{n-1}=2^n$， ……（5分）

$\therefore\frac{S_{n+1}}{2^n}-\frac{S_n}{2^{n-1}}=1$，

$\therefore\left\{\frac{S_n}{2^{n-1}}\right\}$是以1为首项，1为公差的等差数列. ……（6分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）知$\frac{S_n}{2^{n-1}}=1+(n-1)=n$，$\therefore S_n=n\cdot2^{n-1}$. ……（7分）

$\because T_n=1\times1+2\times2+3\times2^2+4\times2^3+\cdots+n\cdot2^{n-1}$，

$\therefore 2T_n=1\times2+2\times2^2+3\times2^3+4\times2^4+\cdots+n\cdot2^n$， ……（9分）

$\therefore -T_n=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}-n\cdot2^n$

$=\frac{1-2^n}{1-2}-n\cdot 2^n=(1-n)\cdot 2^n-1$, ……………………………………(11 分)

$\therefore T_n=(n-1)\cdot 2^n+1$. ……………………………………(12 分)

21. **命题意图** 本题考查利用导数研究函数的性质.

解析 (Ⅰ)$f'(x)=3x^2+2ax+3$, ……………………………………(1 分)

$\because f(x)$有两个极值点,$\therefore f'(x)$有两个零点, ……………………………………(2 分)

$\therefore \Delta>0$,即$4a^2-36>0$,解得$a>3$或$a<-3$, ……………………………………(4 分)

$\therefore$ 实数a的取值范围是$(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$. ……………………………………(5 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)知$\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{2a}{3},\\ x_1x_2=1,\end{cases}$且$x_2>x_1$, ……………………………………(6 分)

$f(x_2)-f(x_1)=(x_2^3+ax_2^2+3x_2+b)-(x_1^3+ax_1^2+3x_1+b)$

$=(x_2-x_1)[(x_2+x_1)^2-x_2x_1+a(x_2+x_1)+3]$

$=\sqrt{(x_2+x_1)^2-4x_2x_1}[(x_2+x_1)^2-x_2x_1+a(x_2+x_1)+3]$

$=\sqrt{\frac{4a^2}{9}-4}\left(\frac{4a^2}{9}-1-\frac{2a^2}{3}+3\right)$

$=-4\sqrt{\frac{a^2}{9}-1}\left(\frac{a^2}{9}-1\right)$. ……………………………………(8 分)

令$t=\sqrt{\frac{a^2}{9}-1}$,则$t>0$,

$\because |-4t^3|\leqslant 32$,$\therefore t^3\leqslant 2^3$,$\therefore 0<t\leqslant 2$. ……………………………………(10 分)

即$0<\sqrt{\frac{a^2}{9}-1}\leqslant 2$,得$9<a^2\leqslant 45$,

得$3<a\leqslant 3\sqrt{5}$,或$-3\sqrt{5}\leqslant a<-3$,

$\therefore a$的取值范围为$[-3\sqrt{5},-3)\cup(3,3\sqrt{5}]$. ……………………………………(12 分)

22. **命题意图** 本题考查利用导数研究函数的性质.

解析 (Ⅰ)若$a\leqslant 0$,易知$f(x)$单调递增,没有最小值,不符合条件. ……………………………………(1 分)

若$a>0$,$f'(x)=2-\frac{a}{e^x}=\frac{2e^x-a}{e^x}$, ……………………………………(2 分)

令$f'(x)=0$,得$x=\ln\frac{a}{2}$,

在$\left(-\infty,\ln\frac{a}{2}\right)$上,$f'(x)<0$,在$\left(\ln\frac{a}{2},+\infty\right)$上,$f'(x)>0$, ……………………………………(3 分)

所以$f(x)$在$\left(-\infty,\ln\frac{a}{2}\right)$上单调递减,在$\left(\ln\frac{a}{2},+\infty\right)$上单调递增,

所以$f(x)_{\min}=f\left(\ln\frac{a}{2}\right)=2\ln\frac{a}{2}-1+\frac{a}{\frac{a}{2}}=2\ln a-2\ln 2+1=1$, ……………………………………(4 分)

解得$a=2$. ……………………………………(5 分)

(Ⅱ)直线$l:y=kx-1$与曲线$y=f(x)$没有公共点,

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。