成都七中 2019届 高三“三诊”模拟文科数学试题

参考答案及评分意见

一、选择题：（每小题 5 分，共 60 分） DCBC/BACD/ABDA

二、填空题：（每小题 5 分，共 20 分） 13、6； 14、4； 15、$\sqrt{5}$； 16、[1, 3]

三、解答题：（共 70 分）

17、解：（Ⅰ）由 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{2n}$ 得，$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a_n}{n}\ n\in N^*$. （2 分）

又 $a_1=\frac{1}{2}$，所以 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项、$\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列. （4 分）

于是 $\frac{a_n}{n}=\frac{1}{2^n}$，故 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{n}{2^n}$，$n\in N^*$. （6 分）

（Ⅱ）由 $S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-1}}+\frac{n}{2^n}$ 得，$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}$. （8 分）

两式错位相减，得 $\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-\frac{n}{2^{n+1}}$ （10 分）

$=1-\frac{n+2}{2^{n+1}}$，于是 $S_n=2-\frac{n+2}{2^n}\ (n\in N^*)$. （12 分）

18、解：（Ⅰ）由已知，在公司中层干部 13 人中，

女性有 5 人，其中初级职称有 5×60%=3 人，中级职称有 5×40%=2 人. （1 分）

男性有 13-5=8 人，其中初、中级职称均为 8×50%=4 人. （2 分）

故所求概率为 $P=\frac{3\times4+2\times4}{5\times8}=\frac{1}{2}$. （5 分）

（Ⅱ）由散点图知，$\bar{x}=\frac{7\times(1+7)}{2\times7}=4$， （6 分）

$\bar{y}=\frac{2.9+3.3+3.6+4.4+4.8+5.2+5.9}{7}=\frac{30.1}{7}=4.3$. （7 分）

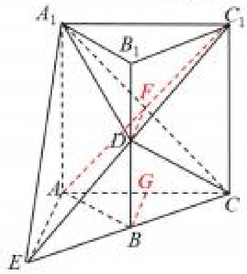
$\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2=9+4+1+0+1+4+9=28$， （8 分）

$\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=-3\times(-1.4)-2\times(-1)-1\times(-0.7)+0\times0.1+1\times0.5+2\times0.9+3\times1.6=14$. （9 分）

所以 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{14}{28}=0.5$， （10 分）

于是 $\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\cdot\overline{x}=4.3-0.5\times4=2.3$，故回归方程为 $\hat{y}=0.5x+2.3$． （11 分）

令 x=13，得 y=8.8（万元），故估计该公司所有中层干部都参加此项业务培训所需要的总费用约为 8.8 万元. （12 分）



19、证明：（Ⅰ）连结 AC_1 交 A_1C 于点 F，连结 DF. （1 分）

∵CC_1∥BD 且 CC_1=2BD，∴ED=DC_1. （2 分）

由已知条件得 AF=FC_1，∴DF∥AE. （3 分）

又∵$AE\not\subset$ 平面 A_1CD，且 $DF\subset$ 平面 A_1CD， （4 分）

∴直线 AE∥平面 A_1CD. （5 分）

（Ⅱ）设 AC 的中点为 G，连结 BG，由已知得 $BG\perp AC$.（6 分）

又∵CC_1∥BD 且 CC_1=2BD，∴EB=BC. 结合 AG=GC，得 BG∥AE. 故 $AE\perp AC$. ① （7 分）

∵四边形 ACC_1A_1 为菱形，∴$AC_1\perp A_1C$. （8 分）

又∵$A_1C\perp C_1E$，且 $AC_1\cap C_1E=C_1$，∴$AC_1\perp$平面 AC_1E. （9 分）

∵$AE\subset$平面 AC_1E，∴$AC_1\perp AE$. ② （10 分）

结合①②及 $AC\cap AC_1=A$，可得 $AE\perp$侧面 A_1ACC_1. （11 分）

又∵$AE\subset$平面 ABC，∴侧面 $A_1ACC_1\perp$底面 ABC. （12 分）

20、解：（Ⅰ）因为椭圆 Γ 经过点 $A\left(\sqrt{2},1\right)$，所以 $\dfrac{2}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$. （1 分）

设 $F(-c,0)$ $(c>0)$，则由 $|AF|=3$ 得 $\left(\sqrt{2}+c\right)^2+1=9$，解得 $c=\sqrt{2}$． （2 分）

又 $a^2=b^2+c^2=b^2+2$，于是 $\dfrac{2}{b^2+2}+\dfrac{1}{b^2}=1$，解得 $b^2=2$（舍负），进而 $a^2=4$. （3 分）

故椭圆 Γ 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$． （4 分）

（Ⅱ）因为 BC∥AD，可设直线 BC 的方程为 $x=\sqrt{2}y+m$ $(m\neq0)$，

代入 $x^2+2y^2=4$ 并整理得 $4y^2+2\sqrt{2}my+m^2-4=0$. 由 $\Delta>0$ 得 $m^2<8$. （5 分）

设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=\dfrac{-m}{\sqrt{2}}$，$y_1y_2=\dfrac{m^2-4}{4}$. （6 分）

所以 $|BC|=\sqrt{3\left[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2\right]}=\sqrt{3\left(\dfrac{m^2}{2}-m^2+4\right)}=\sqrt{\dfrac{3}{2}\left(8-m^2\right)}$. （8 分）

又点 A 到 BC 的距离 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{3}}$，所以 ΔABC 的面积 $S=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{\left(8-m^2\right)m^2}$． （10 分）

故 $S\le\dfrac{\sqrt{2}}{4}\cdot\dfrac{\left(8-m^2\right)+m^2}{2}=\sqrt{2}$（当且仅当 $m=\pm2$ 时取等号）.

所以 ΔABC 面积的最大值为 $\sqrt{2}$． （12 分）

21、解：（Ⅰ）求导得 $f'(x)=2(x+2)-\frac{2}{x}=\frac{2(x^2+2x-1)}{x}$ $(x>0)$． （1 分）

由 $f'(x)>0$ 得 $x>\sqrt{2}-1$；由 $f'(x)<0$ 得 $0<x<\sqrt{2}-1$． （2 分）

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,\sqrt{2}-1)$ 内单调递减，在区间 $(\sqrt{2}-1,+\infty)$ 内单调递增． （3 分）

故函数 $f(x)$ 的极小值点为 $x=\sqrt{2}-1$，无极大值点． （4 分）

（Ⅱ）设函数 $h(x)=f(x)-ae^x-5=(x+2)^2-2\ln x-ae^x-5$ $(x>1)$，则

$h'(x)=2(x+2)-\frac{2}{x}-ae^x$，，其中 $x>1$． （5 分）

(1) 当 $a<\frac{4}{e}$ 时，因为 $h'(1)=4-ae>0$，则必然存在 $x_0>1$，使 $h'(x)>0$ 在区间 $(1,x_0)$ 内恒成立，所以 $h(x)$ 在区间 $(1,x_0)$ 内单调递增． （6 分）

于是 $h(x_0)>h(1)=4-ae>0$，这与题设矛盾，故舍去． （7 分）

(2) 当 $a\geq\frac{4}{e}$ 时，因为 $h''(x)=2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-ae^x$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内单调递减， （8 分）

所以 $h''(x)<h''(1)=4-ae\leq 0$，故 $h'(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内单调递减． （9 分）

于是 $h'(x)<h'(1)=4-ae\leq 0$，从而 $h(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调递减． （10 分）

故对任意 $x>1$，都有 $h(x)<h(1)=4-ae\leq 0$，满足题意． （11 分）

综上所述，常数 a 的取值范围是 $\left[\frac{4}{e},+\infty\right)$． （12 分）

22、（Ⅰ）曲线 C 方程可化为 $2\rho^2\cos^2\theta=\lambda\rho\sin\theta$，其直角坐标方程为 $x^2=\frac{\lambda}{2}y$． （2 分）

又焦点 $F\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ 的直角坐标为 $F(0,1)$．所以 $\frac{\lambda}{8}=1$，解得 $\lambda=8$． （4 分）

（Ⅱ）将直线 l 的参数方程代入 $x^2=4y$，并整理得 $t^2\cos^2\alpha-4t\sin\alpha-4=0$． （5 分）

其中 $\Delta>0$ 恒成立，且 $t_1+t_2=\frac{4\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$ ①，$t_1\cdot t_2=\frac{-4}{\cos^2\alpha}<0$ ②． （6 分）

由 $|AF|=3|FB|$ 得 $t_1=-3t_2$，结合①得 $t_1=\frac{6\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$，$t_2=\frac{-2\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$． （7 分）

代入②得 $\frac{-12\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha}=\frac{-4}{\cos^2\alpha}$，解得 $\tan\alpha=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$． （8 分）

又因为 $0\leq\alpha<\pi$，所以 α 的大小为 $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$． （10 分）

23、解：（Ⅰ）因为 $f(x)=|x-1|-|2x+1|=\begin{cases}x+2, & x\leq-\frac{1}{2}\\ -3x, & -\frac{1}{2}<x<1\\ -x-2, & x\geq 1\end{cases}$． （1 分）

所以 $f(x)$ 在区间 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ 内单调递增，在区间 $\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$ 内单调递减. (2分)

于是 $f(x)$ 的最大值为 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\leqslant 4$. (3分)

又 $f(-6)=-4$, $f(2)=-4$，所以不等式 $|f(x)|\leqslant 4$ 的解集为 $\{x|-6\leqslant x\leqslant 2\}$. (5分)

(Ⅱ) 因为 $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3$ (7分)

$=\frac{1}{2}[(b+c)+(c+a)+(a+b)]\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3$ (8分)

$\geqslant\frac{1}{2}(1+1+1)^2-3=\frac{3}{2}$. (当且仅当 $a=b=c$ 时取“=”号) (9分)

又由(Ⅰ)知，$f(x)$ 的最大值为 $\frac{3}{2}$，所以 $f(x)\leqslant\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$. (10分)

(说明：不同解法，请根据相应步骤类似给分)