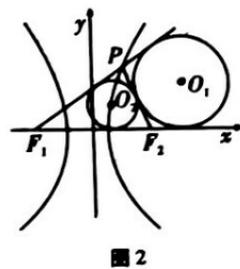


7. 随着新一代人工智能技术的快速发展和突破, 以深度学习计算模式为主的AI算力需求呈指数级增长. 现有一台计算机每秒能进行 $\frac{5}{4} \times 10^{15}$ 次运算, 用它处理一段自然语言的翻译, 需要进行 2^{128} 次运算, 那么处理这段自然语言的翻译所需时间约为(参考数据: $\lg 2 \approx 0.301, 10^{0.431} \approx 2.698$)

- A. 2.698×10^{22} 秒 B. 2.698×10^{23} 秒 C. 2.698×10^{24} 秒 D. 2.698×10^{25} 秒

8. 如图2, 已知双曲线C: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$ 的左、右焦点分别是 F_1, F_2 , 点P在C上且位于第一象限, 圆 O_1 与线段 F_1P 的延长线, 线段 PF_2 以及x轴均相切, $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆为圆 O_2 . 若圆 O_1 与圆 O_2 外切, 且圆 O_1 与圆 O_2 的面积之比为4, 则C的离心率为

- A. $\sqrt{3}$
B. $\frac{5}{3}$
C. 2
D. 3



二、多项选择题(本大题共4个小题, 每小题5分, 共20分, 在每个给出的四个选项中, 有多项是满足要求的, 全部选对的得5分, 部分选对的得2分, 有选错的得0分)

9. 已知 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则下列说法正确的是

- A. $E(\xi) = \mu$ B. $D(\xi) = \sigma$
C. $P(\xi < \mu) = \frac{1}{2}$ D. $P(\xi < \mu - \sigma) = P(\xi > \mu + \sigma)$

10. 要得到函数 $y = \sin x$ 的图象, 只需将 $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 图象上的所有点

- A. 横坐标伸长到原来的2倍, 再向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位
B. 横坐标伸长到原来的2倍, 再向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位
C. 向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位, 再把横坐标伸长到原来的2倍
D. 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位, 再把横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$

11. 已知定义在 \mathbb{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = -f(x)$, 且函数 $y = f(x-1)$ 为奇函数, 则下列说法一定正确的是

- A. $f(x)$ 是周期函数 B. $f(x)$ 的图象关于点 $(2023, 0)$ 对称
C. $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上的偶函数 D. $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上的奇函数

12. 抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点是 F , 直线 m 与 C 相交于不同的两点 A, B , M 是线段 AB 的中点, O 是坐标原点, 则下列说法正确的是

- A. 过点 $(0, p)$ 可作3条与抛物线 C 只有一个公共点的直线
B. 若 $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$, 则直线 m 过定点 $(2p, 0)$
C. 若直线 m 经过焦点 F , 且 $|AF| + 4|BF|$ 的最小值是9, 则 $p = 3$

D. 若 $|AB|=a$ (a 为一常数且 $a \geq 2p$), 则点 M 到 y 轴距离的最小值为 $\frac{a-p}{2}$

三、填空题 (本大题共4小题, 每小题5分, 共20分)

13. 已知向量 a, b 满足 $\vec{a} = (1|-1), |\vec{b}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = 1$, 则向量 a 与 b 的夹角大小为_____.

14. 若 $(x^2 + \frac{1}{x^4})^n$ 的展开式中存在常数项, 则满足要求的最小正整数 n 为_____.

15. 已知圆锥的侧面积为 2π , 它的侧面展开图为一扇形, 扇形顶角的大小为 π , 则该圆锥体积为_____.

16. 已知直线 $y=3x-2$ 与曲线 $f(x) = a \ln x + x$ ($a \neq 0$) 相切, 则实数 a 的值为_____.

四、解答题 (共70分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分10分)

已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_3=4, a_1+a_5=17$, 公比 $q>1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $c_n = \frac{n^2 \cdot a_{n+1}}{3^n}$, 判断数列 $\{c_n\}$ 有没有最大项? 若有, 求出第几项为最大项? 若没有, 请说明理由.

18. (本小题满分12分)

已知 $\triangle ABC$ 的三内角 A, B, C 所对边分别是 a, b, c , 且满足 $\sin^2 \frac{C}{2} = \frac{c^2}{4ab}$

(1) 证明: $\triangle ABC$ 是等腰三角形;

(2) 若点 D 是边 AC 上一点, $\vec{BD} = \frac{1}{3}\vec{BC} + \frac{2}{3}\vec{BA}, c = \sqrt{15}, |\vec{BD}| = 2\sqrt{3}$, 求边 a 的大小.

19. (本小题满分12分)

图3甲中等腰梯形 $ABCD$ 的中位线为 MN , $\angle A=45^\circ$, $AB=6, CD=2$, 现将梯形沿 MN 折起, 使得平面 $MNCD \perp$ 平面 $ABNM$, 如图乙所示.

(1) 在图乙中, E, F 分别是 AB, CN 的中点, 证明: $EF \parallel$

平面 ADM ;

(2) 求图乙中平面 ADM 和平面 $ABCD$ 夹角的大小.

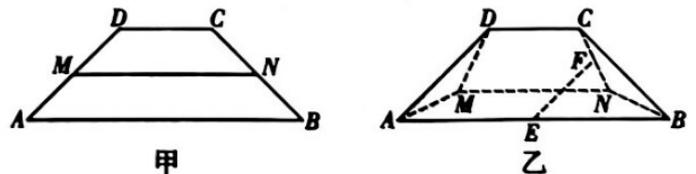


图 3

20. (本小题满分12分)

已知外形完全一样的某品牌电子笔6支装一盒，每盒中的电子笔次品最多一支，每盒电子笔有次品的概率是 $\frac{1}{10}$

(1) 现有一盒电子笔，抽出两支来检测.

① 求抽出的两支均是正品的概率;

② 已知抽出的两支是正品，求剩余产品有次品的概率.

(2) 已知甲乙两盒电子笔均有次品，由于某种原因将两盒笔完全随机的混合在了一起，现随机选3支电子笔进行检测，记 ξ 为选出的3支电子笔中次品的数目，求 ξ 的分布列和期望.

21. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$.

(1) 求 $f(x)$ 的极值;

(2) 对任意的 $n \in \mathbb{N}^{\circ}$ ，求证： $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} < \ln 2$.

22. (本小题满分12分)

已知点 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, $P(x, y)$ 是异于 A, B 的动点, k_{AP} , k_{BP} 分别是直线 AP, BP 的斜率, 且满足 $k_{AP} \cdot k_{BP} = -\frac{3}{4}$.

(1) 求动点 P 的轨迹方程;

(2) 在线段 AB 上是否存在定点 E , 使得过点 E 的直线交 P 的轨迹于 M, N 两点, 且对直线 $x=4$ 上任意一点 Q , 都有直线 QM, QE, QN 的斜率成等差数列. 若存在, 求出定点 E , 若不存在, 请说明理由.