天一大联考

"皖豫名校联盟体"2021届高中毕业班第三次考试

文科数学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡的指定位置。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 集合 $A=\{x\in\mathbf{N}|x^2-3x\leqslant 0\}$，$B=\{-1,0,1,2\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{-1,0,1,2\}$　　B. $\{1,2\}$　　C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{-1,0,1\}$

2. $(2-3i)(1-2i)=$

A. $8+i$　　B. $-4+i$　　C. $8-7i$　　D. $-4-7i$

3. 已知两条不同的直线 l,m 和平面 α，$m\subset\alpha$，则 $l/\!/\alpha$ 是 $l/\!/m$ 的

A. 充要条件　　B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 若抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上的点 $A(3,y_0)$ 到焦点的距离是点 A 到 y 轴距离的3倍，则 y_0 等于

A. $\pm 6\sqrt{2}$　　B. ± 6　　C. $\pm 12\sqrt{2}$　　D. ± 12

5. 函数 $f(x)=2x+\cos 2x$ 的图象在点 $\left(\frac{5\pi}{12},f\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)$ 处的切线方程为

A. $x-y+\frac{5\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$　　B. $x-y-\frac{5\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$

C. $x+y+\frac{5\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$　　D. $x+y-\frac{5\pi}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$

6. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3-a_2=8$，$a_3^2=2a_6$，则 $a_7+a_8=$

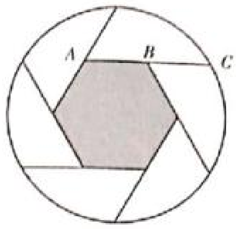
A. 384　　B. 768　　C. 788　　D. 1 536

7. 已知函数 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)-1(0<\varphi<\pi)$ 的图象关于直线 $x=\frac{5\pi}{12}$ 对称，则下面不是 $f(x)$ 的零点的为

A. $-\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{12}$　　C. $\frac{7\pi}{12}$　　D. $\frac{7\pi}{4}$

1
官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

8. 下面是某手机APP的图标，其设计灵感来源于传统照相机快门的机械结构. 该图形是一个正六边形和六个全等的"曲边三角形"拼成的一个圆，且 $AB=BC$. 若在圆内随机取一点，则该点取自正六边形内部的概率为



A. $\frac{3\sqrt{3}}{8\pi}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$　　D. $\frac{\sqrt{3}\pi}{9}$

9. 函数 $f(x)=4\cos^2x-4\cos^4x+\sin x\cos x$ 的最小值是

A. $-\frac{1}{16}$　　B. $\frac{1}{8}$　　C. $\frac{3}{16}$　　D. $\frac{1}{4}$

10. 过双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点 F 作 x 轴的垂线，与双曲线 C 及其一条渐近线在第一象限分别交于 A,B 两点，且 $\overrightarrow{OF}=2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$（$O$ 为坐标原点），则该双曲线的离心率是

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

11. 若圆 $x^2+y^2=6$ 上的两个动点 A,B 满足 $|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{2}$，点 M 在圆 $x^2+y^2=16$ 上运动，则 $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|$ 的最小值是

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

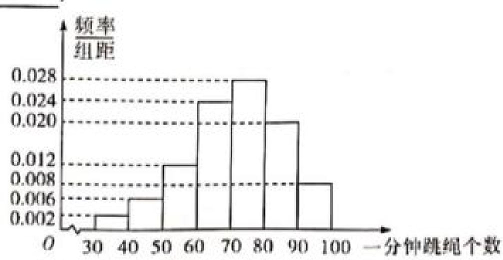
12. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=\log_4(3-x)$. 若对任意的 $x\in[0,b+1]$，均有 $f(x+b)\geqslant f(2x)$，则实数 b 的最大值是

A. $-\frac{2}{3}$　　B. $-\frac{3}{4}$　　C. 0　　D. 1

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 若 $a\log_4 3=\frac{1}{2}$，则 $3^a+9^a=$________.

14. 某小学为了解学生的身体素质情况，从1 500名学生中随机抽取100名，测试他们一分钟跳绳的个数，统计数据得到样本的频率分布直方图如图. 根据频率分布直方图估计，1 500名学生中一分钟跳绳个数不少于80的学生数为________.



15. 已知平面区域 D 是以点 $A(-1,3)$，$B(2,0)$，$C(-2,-1)$ 为顶点的三角形区域（含边界），若在区域 D 内存在无穷多个点 (x,y) 能使目标函数 $z=x+my$ 取得最小值，则 $m=$________.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\frac{4a_n-1}{4a_n}$，且 $a_1=1$，设 $b_n=\frac{2a_n-1}{2}$，则数列 $\{b_nb_{n+1}\}$ 的前100项和为________.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤. 第 17 - 21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22,23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.（12 分）

$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $a\sin A\sin B+c\cos A=(a\cos A+2b)\cos B$.

（Ⅰ）求 B；

（Ⅱ）若 $b=2\sqrt{3}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=6$，求 $\triangle ABC$ 的周长.

18.（12 分）

某蛋糕店制作的蛋糕尺寸有 6,8,10,12,14,16（单位：英寸）六种，根据日常销售统计，将蛋糕尺寸 x（英寸）、平均月销量 y（个）以及成本和单价的数据整理得到如下的表格.

蛋糕尺寸 x（英寸）	6	8	10	12	14	16
平均月销量 y（个）	9	12	15	15	13	8
成本（元）	20	40	60	80	100	120
单价（元）	50	90	140	180	200	220

（Ⅰ）求该蛋糕店销售蛋糕的平均月利润（利润 = 销售收入 - 成本）；

（Ⅱ）根据题中数据，从 $y=a+bx$ 与 $y=c+d(x-11)^2$ 两个模型中选择更合适的，建立 y 关于 x 的回归方程（系数精确到 0.01）.

参考公式：对于一组数据 $(u_1,v_1),(u_2,v_2),\cdots,(u_n,v_n)$，其回归直线方程 $\hat{v}=\hat{\beta}u+\hat{\alpha}$ 的斜率和截距的最小二乘法估计分别为 $\hat{\beta}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})(v_i-\bar{v})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2}$，$\hat{\alpha}=\bar{v}-\hat{\beta}\bar{u}$.

参考数据：$\sum\limits_{i=1}^{6}(y_i-\bar{y})(x_i-\bar{x})=-2$，$\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2=70$；

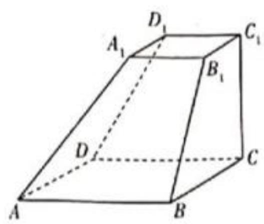
$\sum\limits_{i=1}^{6}(y_i-\bar{y})(t_i-\bar{t})=-160$，$\sum\limits_{i=1}^{6}(t_i-\bar{t})^2=600$，其中 $t_i=(x_i-11)^2$，$\bar{t}=\dfrac{1}{6}\sum\limits_{i=1}^{6}t_i$.

19.（12 分）

如图，四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的上、下底面均为菱形，$CC_1\perp$ 平面 $ABCD$，$\angle BAD=60°$，$\angle A_1AD=\angle A_1AB=45°$，$AB=2A_1B_1=2$.

（Ⅰ）证明：平面 $A_1AB\perp$ 平面 A_1AD；

（Ⅱ）求四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积.



20.（12 分）

已知椭圆 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F(c,0)(c>0)$，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，经过 F 且垂直于 x 轴的直线交 Γ 于第一象限的点 M，O 为坐标原点，且 $|OM|=\frac{\sqrt{13}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 Γ 的方程.

（Ⅱ）设不经过原点 O 且斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线交椭圆 Γ 于 A,B 两点，A,B 关于原点 O 对称的点分别是 C,D，试判断四边形 $ABCD$ 的面积有没有最大值. 若有，请求出最大值；若没有，请说明理由.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=\ln x+ax(a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）设 $g(x)=f(x)+x^2+2$，若 $g(x)$ 至少有两个不同的零点，求 a 的最大值.

（二）选考题：共 10 分. 请考生在第 22，23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.［选修 4－4：坐标系与参数方程］（10 分）

在极坐标系中，已知曲线 $C:\rho=\frac{2a}{1-a\cos\theta}$.

（Ⅰ）若 $0<a<1$，曲线 C 与极轴所在直线交于 A,B 两点，且 $|AB|=4\sqrt{2}$，求 a 的值；

（Ⅱ）若 $a=1$，直线 l_1,l_2 经过极点且相互垂直，l_1 与 C 交于 P,Q 两点，l_2 与 C 交于 M,N 两点，求 $|PQ|+|MN|$ 的最小值.

23.［选修 4－5：不等式选讲］（10 分）

已知函数 $f(x)=|2x-1|+|x+1|$.

（Ⅰ）解关于 x 的不等式 $f(x)<8$；

（Ⅱ）若不等式 $f(x)\geqslant k|x|$ 恒成立，求实数 k 的取值范围.

天一大联考

“皖豫名校联盟体”2021届高中毕业班第三次考试

文科数学·答案

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.

1. 答案 C

命题意图 本题考查集合的表示与运算.

解析 因为 $A=\{x\in\mathbf{N}|x^2-3x\leqslant 0\}=\{x\in\mathbf{N}|0\leqslant x\leqslant 3\}=\{0,1,2,3\}$,所以 $A\cap B=\{0,1,2\}$.

2. 答案 D

命题意图 本题考查复数的运算.

解析 $(2-3\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})=2-4\mathrm{i}-3\mathrm{i}-6=-4-7\mathrm{i}$.

3. 答案 D

命题意图 本题考查空间位置关系的推理,以及充分条件和必要条件的判断.

解析 若 $l/\!/\alpha$,不能说明直线 l 平行于平面 α 内的任意一条直线,所以不一定有 $l/\!/m$,故充分性不成立;若 $l/\!/m$ 且 $m\subset\alpha$,也不能说明 $l/\!/\alpha$,因为还有可能 $l\subset\alpha$,故必要性不成立.

4. 答案 A

命题意图 本题考查抛物线的性质.

解析 因为 $3+\frac{p}{2}=9$,所以 $p=12$,$y^2=24x$,又点 $A(3,y_0)$ 在抛物线 $y^2=24x$ 上,所以代入得 $y_0^2=24\times 3$,解得 $y_0=\pm 6\sqrt{2}$.

5. 答案 A

命题意图 本题考查导数的几何意义.

解析 由题意得 $f'(x)=2-2\sin 2x$,所以 $f(x)$ 在点 $\left(\frac{5\pi}{12},f\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)$ 处的切线斜率为 $k=f'\left(\frac{5\pi}{12}\right)=2-2\sin\frac{5\pi}{6}=1$,又 $f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{5\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以函数 $f(x)$ 的图象在点 $\left(\frac{5\pi}{12},f\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)$ 处的切线方程为 $y-\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=x-\frac{5\pi}{12}$,即 $x-y+\frac{5\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$.

6. 答案 B

命题意图 本题考查等比数列的性质.

解析 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q. 由题意得 $\begin{cases}a_1q^2-a_1q=8,\\(a_1q^2)^2=2a_1q^5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=4,\\q=2,\end{cases}$ 所以 $a_n=4\times 2^{n-1}=2^{n+1}$,所以 $a_7+a_8=2^8+2^9=768$.

7. 答案 C

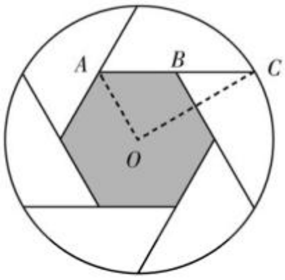
命题意图 本题考查三角函数的图象与性质.

解析 由题意得 $2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,得 $\varphi=k\pi-\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$,又 $0<\varphi<\pi$,所以 $\varphi=\frac{2\pi}{3}$,所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)-1$,代入选项验证可知 $-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{4}$ 都是 $f(x)$ 的零点,$\frac{7\pi}{12}$ 不是 $f(x)$ 的零点.

8. 答案 B

命题意图 本题考查几何概型的概率计算.

解析　如图所示，设 O 是圆心，则 O 也是正六边形的中心. 设正六边形的边长为 1，则 $OA=1$，$AC=2$，$OC=\sqrt{3}$，即圆的半径为 $\sqrt{3}$，所以圆的面积为 3π，正六边形的面积为 $6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times1^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，所以所求的概率为 $\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$.



9. **答案**　A

命题意图　本题考查三角恒等变换的应用，以及求函数最值.

解析　$f(x)=4\cos^2x-4\cos^4x+\sin x\cos x=4\cos^2x(1-\cos^2x)+\sin x\cos x=4\cos^2x\sin^2x+\sin x\cos x=\sin^22x+\frac{1}{2}\sin 2x$，令 $\sin 2x=t$，则 $t\in[-1,1]$，则 $f(t)=t^2+\frac{1}{2}t$，图象是开口向上的抛物线，对称轴为 $t=-\frac{1}{4}$，所以 $f(t)_{\min}=f\left(-\frac{1}{4}\right)=\left(-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=-\frac{1}{16}$.

10. **答案**　D

命题意图　本题考查双曲线的性质.

解析　设双曲线 C 的半焦距为 $c(c>0)$. 联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\\x=c,\end{cases}$ 得点 $A\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$. 联立 $\begin{cases}y=\frac{b}{a}x,\\x=c,\end{cases}$ 得点 $B\left(c,\frac{bc}{a}\right)$. 由条件知 $|BF|=2|AF|$，所以 $\frac{bc}{a}=\frac{2b^2}{a}$，则 $c=2b$，所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{c}{\sqrt{c^2-b^2}}=\frac{2b}{\sqrt{4b^2-b^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

11. **答案**　C

命题意图　本题考查圆的方程以及平面向量的线性运算.

解析　由 $x^2+y^2=6$ 可知圆心为坐标原点 $O(0,0)$，半径为 $r=\sqrt{6}$，因为 $|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{2}$，所以圆心到直线 AB 的距离 $d=\sqrt{r^2-\left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2}=2$，设 AB 的中点为 N，则 $|ON|=d=2$，所以 N 点在以原点为圆心，以 $r_1=2$ 为半径的圆上，所以 N 点的轨迹方程为 $x^2+y^2=4$，因为 N 为 AB 的中点，所以 $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MN}$，因为点 M 在圆 $x^2+y^2=16$ 上运动，圆 $x^2+y^2=16$ 的半径 $r_2=4$，所以 $|\overrightarrow{MN}|_{\min}=r_2-r_1=2$，所以 $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|_{\min}=2|\overrightarrow{MN}|_{\min}=4$.

12. **答案**　B

命题意图　本题考查函数的奇偶性和单调性.

解析　由于当 $x\leqslant0$ 时，$f(x)=\log_4(3-x)$ 为单调递减函数，又因为函数 $f(x)$ 为偶函数，所以当 $x>0$ 时，$f(x)$ 为单调递增函数. 所以 $f(x+b)\geqslant f(2x)$ 等价于 $|x+b|\geqslant|2x|$，即 $|x+b|\geqslant2x$. 由区间的定义可知 $b>-1$，若 $x+b\geqslant0$，于是 $x+b\geqslant2x$，即 $b\geqslant x$，由于 x 的最大值为 $b+1$，故 $b\geqslant x$ 显然不恒成立；若 $b+x<0$，所以 $x+b\leqslant-2x$，即 $x\leqslant-\frac{1}{3}b$，所以 $b+1\leqslant-\frac{1}{3}b$，即 $b\leqslant-\frac{3}{4}$，故 b 的最大值为 $-\frac{3}{4}$.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. **答案**　6

命题意图　本题考查对数和指数的运算性质.

解析　由条件得 $a=\frac{1}{2}\log_34=\log_32$，所以 $3^a+9^a=2+4=6$.

14. **答案** 420

命题意图 本题考查对频率分布直方图的理解.

解析 $1\ 500\times(0.02+0.008)\times10=420$.

15. **答案** $-\frac{1}{4}$

命题意图 本题考查简单的线性规划问题.

解析 由题可知 $m=0$ 不满足题意,所以 $m\neq0$. 由 $z=x+my$ 得 $y=-\frac{1}{m}x+\frac{z}{m}$. 若 $-\frac{1}{m}=k_{AB}=-1$,则 $m=1$,仅当直线 $y=-x+z$ 经过点 C 时 z 取得最小值,不符合条件;若 $-\frac{1}{m}=k_{BC}=\frac{1}{4}$,则 $m=-4$,仅当直线 $y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}z$ 经过点 A 时 z 取得最小值,不符合条件;若 $-\frac{1}{m}=k_{AC}=4$,则 $m=-\frac{1}{4}$,当直线 $y=4x-4z$ 与 AC 重合时 z 取得最小值,符合条件.

16. **答案** $\frac{25}{101}$

命题意图 本题考查数列的递推公式以及求前 n 项和.

解析 由 $a_{n+1}=\frac{4a_n-1}{4a_n}$,得 $2a_{n+1}-1=\frac{2a_n-1}{2a_n}$,则$\frac{1}{2a_{n+1}-1}=\frac{2a_n}{2a_n-1}=\frac{1}{2a_n-1}+1$,所以数列$\left\{\frac{1}{2a_n-1}\right\}$是以$\frac{1}{2a_1-1}=1$为首项,1 为公差的等差数列,则$\frac{1}{2a_n-1}=1+(n-1)\times1=n$,所以 $b_n=\frac{2a_n-1}{2}=\frac{1}{2n}$,则 $b_n\cdot b_{n+1}=\frac{1}{2n\cdot2(n+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,所以数列$\{b_nb_{n+1}\}$的前 100 项和为 $b_1b_2+b_2b_3+\cdots+b_{99}b_{100}+b_{100}b_{101}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}+\frac{1}{100}-\frac{1}{101}\right)=\frac{25}{101}$.

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查正弦定理和余弦定理的应用.

解析 (Ⅰ)由条件得 $a(\sin A\sin B-\cos A\cos B)+c\cos A=2b\cos B$.

所以 $-a\cos(A+B)+c\cos A=2b\cos B$, ………………(1 分)

所以 $a\cos C+c\cos A=2b\cos B$, ………………(2 分)

由正弦定理得 $\sin A\cos C+\sin C\cos A=2\sin B\cos B$, ………………(3 分)

整理得 $\sin(A+C)=2\sin B\cos B=\sin B$. ………………(4 分)

因为在$\triangle ABC$中,$0<B<\pi$,所以 $\sin B\neq0$,则 $2\cos B=1$, ………………(5 分)

所以 $B=\frac{\pi}{3}$. ………………(6 分)

(Ⅱ)由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,即$(a+c)^2-3ac=12$, ………………(8 分)

因为$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=ac\cos B=\frac{1}{2}ac=6$,所以 $ac=12$, ………………(10 分)

所以$(a+c)^2-36=12$,所以 $a+c=4\sqrt{3}$, ………………(11 分)

所以$\triangle ABC$的周长为$6\sqrt{3}$. ………………(12 分)

18. **命题意图** 本题考查统计的应用,回归分析的基本思想.

解析 (Ⅰ)根据题意,该蛋糕店销售蛋糕的平均月利润为

$9\times30+12\times50+15\times80+15\times100+13\times100+8\times100=5\ 670$(元). ………………(4 分)

(Ⅱ)模型 $y=c+d(x-11)^2$ 更合适. ………………(5 分)

设 $t=(x-11)^2$,先建立 y 关于 t 的线性回归方程 $\hat{y}=c+dt$. ………………

$\bar{y}=\frac{1}{6}(9+12+15+15+13+8)=12, \bar{t}=\frac{1}{6}(25+9+1+1+9+25)=\frac{35}{3}$, ………………………………（6分）

$$\hat{d}=\frac{\sum_{i=1}^{6}(y_i-\bar{y})(t_i-\bar{t})}{\sum_{i=1}^{6}(t_i-\bar{t})^2}\approx-\frac{4}{15}\approx-0.27,$$ ………………………………（8分）

$\hat{c}=\bar{y}-\hat{d}\bar{t}=12+\frac{4}{15}\times\frac{35}{3}\approx15.11$, ………………………………（10分）

所以 $\hat{y}=15.11-0.27t$,

因此 y 关于 x 的回归方程为 $\hat{y}=15.11-0.27(x-11)^2$. ………………………………（12分）

19. **命题意图** 本题考查空间几何体的结构特征，四棱台的体积求法.

解析 （Ⅰ）作 $BE\perp AA_1$，垂足为 E，连接 DE,BD，如图.

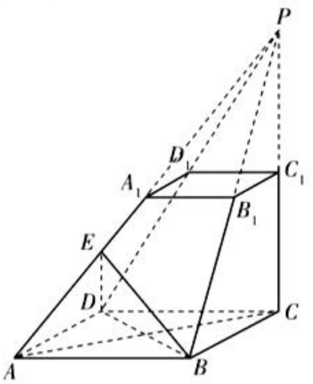
因为四边形 $ABCD$ 是菱形，且 $\angle BAD=60°, AB=2$，所以 $BD=2$. ………………………………（1分）

因为 $AB=AD, AE=AE, \angle A_1AD=\angle A_1AB=45°$，所以 $\triangle ABE\cong\triangle ADE$, ………………………………（2分）

所以 $BE=DE=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=\sqrt{2}$，所以 $BE^2+DE^2=BD^2$，即 $BE\perp DE$. ………………………………（3分）

又因为 $AA_1\cap DE=E, AA_1, DE\subset$ 平面 A_1AD，所以 $BE\perp$ 平面 A_1AD. ………………………………（4分）

因为 $BE\subset$ 平面 A_1AB，所以平面 $A_1AB\perp$ 平面 A_1AD. ………………………………（5分）



（Ⅱ）根据棱台的性质，延长 AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 可交于一点，设为 P，连接 AC，如图.

因为 $AB=2A_1B_1$，所以 A_1, B_1, C_1, D_1 分别是 PA, PB, PC, PD 的中点. ………………………………（6分）

设 $PC=h$，易知 $BC=2, AC=2\sqrt{3}$，所以 $PB=\sqrt{4+h^2}, PA=\sqrt{12+h^2}$,

在 $\triangle PAB$ 中，根据余弦定理得

$\cos\angle PAB=\frac{PA^2+AB^2-PB^2}{2\times PA\times AB}=\frac{12+h^2+4-(4+h^2)}{4\sqrt{12+h^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $h=\sqrt{6}$. ………………………………（9分）

所以四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为

$V_{P-ABCD}-V_{P-A_1B_1C_1D_1}=\frac{7}{8}V_{P-ABCD}=\frac{7}{8}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2\times\sqrt{6}=\frac{7\sqrt{2}}{4}$. ………………………………（12分）

20. **命题意图** 本题考查椭圆的方程与椭圆的性质，椭圆与直线的位置关系.

解析 （Ⅰ）由题意知 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $a^2=\frac{4}{3}c^2$，① ………………………………（1分）

又由 $a^2=b^2+c^2$，可得 $b^2=\frac{c^2}{3}$. ② ………………………………（2分）

联立 $\begin{cases}x=c,\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=c,\\ y=\pm\frac{b^2}{a},\end{cases}$ 则点 $M\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$.

则 $|OM|=\sqrt{c^2+\left(\frac{b^2}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}$. ③ ……………………………………………… (3 分)

联立①②③,解得 $c=\sqrt{3}$, $a=2$, $b=1$.

故椭圆 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………………………………… (4 分)

(Ⅱ)设直线 AB 的方程为 $y=\frac{1}{2}x+m$,

联立 $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+m, \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1, \end{cases}$ 消去 y 得 $2x^2+4mx+4(m^2-1)=0$, ……………………………… (5 分)

所以 $\Delta=(4m)^2-4\times2\times4(m^2-1)=16(2-m^2)>0$,解得 $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$. ……………… (6 分)

则 $x_1+x_2=-2m$, $x_1x_2=2(m^2-1)$. ……………………………………………… (7 分)

$$|AB|=\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}|x_1-x_2|$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{(-2m)^2-4\times2(m^2-1)}$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{8-4m^2}.$$ ……………………………………………… (8 分)

原点 O 到直线 AB 的距离为 $d=\frac{|m|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+(-1)^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}|m|$,

则直线 CD 到直线 AB 的距离为 $d'=2d=\frac{4\sqrt{5}}{5}|m|$, ……………………………… (9 分)

显然四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

所以 $S_{四边形ABCD}=|AB|d'=\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{8-4m^2}\cdot\frac{4\sqrt{5}}{5}|m|=2\sqrt{m^2(8-4m^2)}=2\sqrt{\frac{1}{4}\cdot4m^2(8-4m^2)}$ …… (11 分)

$\leqslant2\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{4m^2+(8-4m^2)}{2}\right]^2}=4$,当且仅当 $4m^2=8-4m^2$,即 $m=\pm1$ 时,等号成立,

故四边形 $ABCD$ 的面积存在最大值,且最大值为 4. ……………………………… (12 分)

21. **命题意图** 本题考查利用导数研究函数性质.

解析 (Ⅰ)函数 $f(x)=\ln x+ax$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

$f'(x)=\frac{1}{x}+a=\frac{1+ax}{x}$. ……………………………………………… (1 分)

当 $a\geqslant0$ 时, $f'(x)>0$ 恒成立,故函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ……………… (2 分)

当 $a<0$ 时,令 $f'(x)>0$,得 $0<x<-\frac{1}{a}$;令 $f'(x)<0$,得 $x>-\frac{1}{a}$.

故函数 $f(x)$ 在 $\left(0,-\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增,在 $\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减. ……………… (4 分)

(Ⅱ) $g(x)=f(x)+x^2+2=\ln x+x^2+ax+2$,

$g(x)$ 至少有两个不同的零点,则等价于方程 $\ln x+x^2+ax+2=0$ 至少有两个相异的实数根. ………… (5 分)

由 $\ln x+x^2+ax+2=0$,得 $-a=\frac{\ln x}{x}+x+\frac{2}{x}$.

设 $F(x)=\frac{\ln x}{x}+x+\frac{2}{x}$，则 $F'(x)=\frac{x^2-\ln x-1}{x^2}$.

令 $h(x)=x^2-\ln x-1$，则 $h'(x)=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}$， ……………………（6 分）

令 $h'(x)=0$，可得 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$（舍去）.

所以在 $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 上，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

所以函数 $h(x)$ 的最小值为 $h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-1<0$. ……………………（7 分）

又 $h(1)=0$，所以当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h(x)>0$，

又 $h\left(\frac{1}{e}\right)=\left(\frac{1}{e}\right)^2-\ln\frac{1}{e}-1>0$，因此必存在唯一 $x_0\in\left(\frac{1}{e},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，使得 $h(x_0)=0$， ……………………（8 分）

当 x 变化时，$h(x)$，$F'(x)$，$F(x)$ 的变化情况如表：

x	$(0,x_0)$	x_0	$(x_0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$h(x)$	+	0	−	0	+
$F'(x)$	+	0	−	0	+
$F(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

当 $x=x_0$ 时，$F(x)$ 有极大值 $F(x_0)$，当 $x=1$ 时，$F(x)$ 有极小值 $F(1)$. ……………………（10 分）

又 $F(1)=3$，$F\left(\frac{1}{e^2}\right)=\frac{1}{e^2}<F(1)$，且当 $x\to+\infty$ 时，$F(x)\to+\infty$，

所以 $F(1)\leqslant -a\leqslant F(x_0)$，可得 $-F(x_0)\leqslant a\leqslant -F(1)$ 时，直线 $y=-a$ 与函数 $y=F(x)$ 的图象至少有两个公共点，所以 a 的最大值为 -3. ……………………（12 分）

22. **命题意图** 本题考查极坐标系的应用.

解析 （Ⅰ）设极点为 O.

令 $\theta=0$，得 $|OA|=\rho_1=\frac{2a}{1-a}$，令 $\theta=\pi$，得 $|OB|=\rho_2=\frac{2a}{1+a}$， ……………………（2 分）

则 $|AB|=|OA|+|OB|=\frac{2a}{1-a}+\frac{2a}{1+a}=4\sqrt{2}$. ……………………（4 分）

解得 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$（$a=-\sqrt{2}$ 舍去）. ……………………（5 分）

（Ⅱ）设直线 $l_1:\theta=\alpha(\rho\in\mathbf{R})$，则 $l_2:\theta=\alpha+\frac{\pi}{2}(\rho\in\mathbf{R})$. ……………………（6 分）

则 $|PQ|=\frac{2}{1-\cos\alpha}+\frac{2}{1+\cos\alpha}=\frac{4}{1-\cos^2\alpha}=\frac{4}{\sin^2\alpha}$， ……………………（7 分）

用 $\alpha+\frac{\pi}{2}$ 替换 α 得 $|MN|=\frac{4}{\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{4}{\cos^2\alpha}$， ……………………（8 分）

所以 $|PQ|+|MN|=\frac{4}{\sin^2\alpha}+\frac{4}{\cos^2\alpha}=\frac{16}{\sin^2 2\alpha}$，

则当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时，$|PQ|+|MN|$ 取最小值 16. ……………………（10 分）

23. **命题意图** 本题考查绝对值不等式的性质的应用、绝对值不等式的求解.

解析 （Ⅰ）由 $f(x)<8$ 可得：

$\begin{cases}x<-1,\\(1-2x)-(x+1)<8,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2},\\(1-2x)+(x+1)<8,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>\dfrac{1}{2},\\(2x-1)+(x+1)<8,\end{cases}$

解得 $-\dfrac{8}{3}<x<-1$ 或 $-1\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{8}{3}$,

所以原不等式的解集为 $\left(-\dfrac{8}{3},\dfrac{8}{3}\right)$. ……………………………………………… (5 分)

(Ⅱ)当 $x=0$ 时,不等式显然成立;

当 $x\neq0$ 时,不等式 $f(x)\geqslant k|x|$ 可变为 $k\leqslant\dfrac{f(x)}{|x|}=\dfrac{|2x-1|+|x+1|}{|x|}$, ……………………… (6 分)

而 $\dfrac{|2x-1|+|x+1|}{|x|}=\left|\dfrac{1}{x}-2\right|+\left|\dfrac{1}{x}+1\right|\geqslant\left|\left(\dfrac{1}{x}-2\right)-\left(\dfrac{1}{x}+1\right)\right|=3$, ……………………… (8 分)

当且仅当 $\left(\dfrac{1}{x}-2\right)\left(\dfrac{1}{x}+1\right)\leqslant0$,即 $-1\leqslant\dfrac{1}{x}\leqslant2$ 时,取得等号.

故 $\dfrac{|2x-1|+|x+1|}{|x|}$ 的最小值为 3. ……………………………………………… (9 分)

所以 k 的取值范围是 $(-\infty,3]$. ……………………………………………… (10 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》