

决胜新高考——2022 届高三年级大联考

数学参考答案与评分细则

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8
A	B	C	B	D	D	C	C

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9	10	11	12
BCD	BCD	BC	ACD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13	14	15	16
$a < -\frac{1}{3}$ 的所有值均可	$(\sqrt{e}, +\infty)$	$\frac{1}{3}$	$(-\sqrt{5}, -2] \cup (0, \sqrt{3}]$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 解：若选③，当 $n=1$ 时， $a_1 = S_1 = 2^1 + 1 = 3$ 。

当 $n \geq 2$ 时， $S_n = 2^n + 1$ ， $S_{n-1} = 2^{n-1} + 1$ ，

所以 $a_n = S_n - S_{n-1} = (2^n + 1) - (2^{n-1} + 1) = 2^{n-1}$ 。当 $n=1$ 时不符合，故不选③。…… 2 分

若选④，当 $n \geq 2$ 时，因为 $a_{n+1} = S_n + 1$ ，所以 $a_n = S_{n-1} + 1$ 。

所以 $a_{n+1} - a_n = (S_n + 1) - (S_{n-1} + 1) = a_n$ ，

所以 $a_{n+1} = 2a_n (n \geq 2)$ 。…… 4 分

若选①，当 $n=1$ 时， $a_2 = S_1 + 1 = a_1 + 1 = 2$ ，所以 $a_2 = 2a_1$ 。…… 6 分

若选②，当 $n=1$ 时， $a_2 = S_1 + 1 = a_1 + 1 = 3$ ，所以 $a_2 \neq 2a_1$ 。…… 8 分

综上可知选①④，数列 $\{a_n\}$ 是等比数列， $a_n = 2^{n-1}$ 。…… 10 分



18. 解: (1) 因为 $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i}{5} = 5$, $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^5 y_i}{5} = 198$,

$$\text{所以 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} = 24, \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

所以 $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 198 - 24 \times 5 = 78$,

所以 $\hat{y} = 24x + 78$. \dots\dots 8 \text{ 分}

(2) ① 当 $x = 20$ 时, $\hat{y} = 24 \times 20 + 78 = 558$.

② 施肥要科学, 过量施肥会降低农作物产量. (类似意思即给分) \dots\dots 12 \text{ 分}

19. 解: (1) 在 $\triangle ABC$ 中, $\tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 又 $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$, 解得 $\cos B = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,

在 $\triangle ABD$ 中, $BD = AD = 3$, 所以 $AB = 2BD \cos B = 4\sqrt{2}$.

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理, 得

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos B = 32 + 16 - 2 \times 4\sqrt{2} \times 4 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{16}{3},$$

所以 $AC = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. \dots\dots 4 \text{ 分}

(2) 在 $\triangle ABD$ 中, 由正弦定理 $\frac{AB}{\sin \angle ADB} = \frac{BD}{\sin \angle BAD}$, 得 $AB = \frac{BD \sin \angle ADB}{\sin \angle BAD}$.

在 $\triangle ACD$ 中, 由正弦定理 $\frac{AC}{\sin \angle ADC} = \frac{CD}{\sin \angle CAD}$, 得 $AC = \frac{CD \sin \angle ADC}{\sin \angle CAD}$.

因为 AD 平分 $\angle BAC$, 所以 $\sin \angle BAD = \sin \angle CAD$.

因为 $\angle BDA + \angle CDA = \pi$, 所以 $\sin \angle BDA = \sin(\pi - \angle CDA) = \sin \angle CDA$.

所以 $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} = 3$. \dots\dots 8 \text{ 分}

在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理 $\frac{AB}{\sin \angle BCA} = \frac{AC}{\sin \angle ABC}$, 得 $\frac{AB}{AC} = \frac{\sin \angle BCA}{\sin \angle ABC} = 3$.

因为 $\tan B = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 所以 $\sin B = \frac{1}{3}$, 所以 $\sin \angle BCA = 3 \sin \angle ABC = 1$,

所以 $\angle BCA = \frac{\pi}{2}$. \dots\dots 10 \text{ 分}

因为 $\cos \angle BAC = \cos(\frac{\pi}{2} - \angle CBA) = \sin \angle CBA = \frac{1}{3}$,

且 $\cos \angle BAC = \cos 2\angle BAD = 1 - 2\sin^2 \angle BAD$,

所以 $\sin \angle BAD = \frac{\sqrt{3}}{3}$. \dots\dots 12 \text{ 分}



取 MN 的中点 O , 连接 CO , BO , 则 $CO \perp MN$, $BO \perp MN$,

所以 $\angle COB$ 为二面角 $C-MN-B$ 的平面角.

..... 8 分

在正 $\triangle CMN$ 中, $CO = \frac{\sqrt{3}}{2} CM = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 同理可得, $BO = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

在 $\triangle BCO$ 中, 由余弦定理 $\cos \angle BOC = \frac{OC^2 + OB^2 - BC^2}{2 \times OC \times OB}$,

$$\text{得 } \cos \angle BOC = \frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - 2^2}{2 \times \frac{\sqrt{6}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2}} = -\frac{1}{3},$$

$$\text{所以 } \sin \angle BOC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle BOC} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

所以二面角 $C-MN-B$ 的正弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

..... 12 分

21. 解: (1) 设椭圆 C 的焦距为 $2c$,

因为椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 所以 $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$,

所以 $a = 2c$, $b = \sqrt{3}c$.

因为以椭圆 C 的四个顶点为顶点的四边形面积为 $16\sqrt{3}$,

所以 $\frac{1}{2} \times 2a \times 2b = 4\sqrt{3}c^2 = 16\sqrt{3}$, 所以 $c = 2$, $a = 2c = 4$, $b = 2\sqrt{3}$.

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

..... 4 分

(2) ①由 (1), 得 $A(-4, 0)$, $F(2, 0)$.

设 $P(x_0, y_0)$, 则 $M\left(\frac{x_0 - 4}{2}, \frac{y_0}{2}\right)$.

当 $x_0 \neq 2$ 时, 直线 l 的方程为 $y - \frac{y_0}{2} = \frac{y_0}{x_0 - 2} \left(x - \frac{x_0 - 4}{2}\right)$, 即 $y = \frac{y_0}{x_0 - 2}(x + 1)$,

当 $x_0 = 2$ 时, 直线 l 的方程为 $x + 1 = 0$.

此时, 直线 l 过定点 $D_2(-1, 0)$.

..... 6 分

②解法 1: 存在定点 $D_1(-3, 0)$, $D_2(-1, 0)$ 满足题意.

当 $x_0 \neq 2$ 时, 直线 PF 的方程为 $y = \frac{y_0}{x_0 - 2}(x - 2)$.

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1, \\ y = \frac{y_0}{x_0 - 2}(x - 2) \end{cases} \text{ 得 } (60 - 12x_0)x^2 - 16y_0^2x - 60x_0^2 + 192x_0 = 0,$$



$$\text{因为 } x_0 x_D = \frac{-60x_0^2 + 192x_0}{60 - 12x_0}, \text{ 所以 } x_D = \frac{-60x_0 + 192}{60 - 12x_0} = \frac{5x_0 - 16}{x_0 - 5},$$

$$y_D = \frac{y_0}{x_0 - 2} \left(\frac{5x_0 - 16}{x_0 - 5} - 2 \right) = \frac{3y_0}{x_0 - 5}, \text{ 即 } Q \left(\frac{5x_0 - 16}{x_0 - 5}, \frac{3y_0}{x_0 - 5} \right).$$

因为 $l \parallel PF$, M 为线段 PA 的中点, 所以 B 为线段 QA 的中点,

$$\text{所以 } B \left(\frac{x_0 + 4}{2(x_0 - 5)}, \frac{3y_0}{2(x_0 - 5)} \right).$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{D_2 B} = \left(\frac{3x_0 - 6}{2(x_0 - 5)}, \frac{3y_0}{2(x_0 - 5)} \right), \overrightarrow{FQ} = \left(\frac{3x_0 - 6}{x_0 - 5}, \frac{3y_0}{x_0 - 5} \right),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{D_2 B} = \frac{1}{2} \overrightarrow{FQ}, \text{ 所以 } |D_2 B| = \frac{1}{2} |FQ|.$$

..... 9分

记椭圆 C 的左焦点为 $F'(-2, 0)$,

$$\text{因为 } \overrightarrow{D_1 B} = \left(\frac{7x_0 - 26}{2(x_0 - 5)}, \frac{3y_0}{2(x_0 - 5)} \right), \overrightarrow{F'Q} = \left(\frac{7x_0 - 26}{x_0 - 5}, \frac{3y_0}{x_0 - 5} \right),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{D_1 B} = \frac{1}{2} \overrightarrow{F'Q}, \text{ 所以 } |D_1 B| = \frac{1}{2} |F'Q|. \text{ 所以 } |D_1 B| + |D_2 B| = \frac{1}{2} (|F'Q| + |FQ|) = 4.$$

当 $x_0 = 2$ 时, 由 $P(2, \pm 3)$, 得 $B(-1, \pm \frac{3}{2})$,

$$|D_2 B| = \frac{3}{2}, |D_1 B| = \frac{5}{2}, \text{ 所以 } |D_1 B| + |D_2 B| = 4.$$

综上可知存在定点 $D_1(-3, 0)$, $D_2(-1, 0)$ 满足题意.

..... 12分

②解法2: 存在定点 $D_1(-3, 0)$, $D_2(-1, 0)$ 满足题意.

$$\text{由①, 得 } |BD_2| = \frac{1}{2} |QF|.$$

..... 6分

记椭圆 C 的左焦点为 $F'(-2, 0)$, 则 AF' 的中点为 $D_1(-3, 0)$,

$$\text{又点 } B \text{ 为 } AQ \text{ 的中点, 所以 } |BD_1| = \frac{1}{2} |QF'|,$$

..... 8分

$$\text{所以 } |BD_1| + |BD_2| = \frac{1}{2} (|QF'| + |QF|) = 4.$$

..... 10分

综上可知存在定点 $D_1(-3, 0)$, $D_2(-1, 0)$ 满足题意.

..... 12分

22. 解: (1) 因为 $a = 0$, $f(x) = \sin^2 x$, 所以 $f(\frac{\pi}{4}) = \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$, $f'(x) = 2 \sin x \cos x$,

$$\text{所以 } f'(\frac{\pi}{4}) = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = 1,$$

所以曲线 $y = f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{4}$ 处的切线方程为

$$y - \frac{1}{2} = x - \frac{\pi}{4}, \text{ 即 } x - y - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} = 0.$$

..... 4分



(2) 解法 1: 因为 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $\cos x > 0$.

所以不等式 $\frac{\sin^2 x}{\cos x} - ax^2 > 0$ 任意的 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 恒成立.

设 $g(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos x} - ax^2$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$,

则 $g'(x) = \sin x + \frac{\sin x}{\cos^2 x} - 2ax$, $g'(0) = 0$.

设 $h(x) = g'(x) = \sin x + \frac{\sin x}{\cos^2 x} - 2ax$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$,

则 $h'(x) = \cos x - \frac{1}{\cos x} + \frac{2}{\cos^3 x} - 2a = \cos x - \cos^{-1} x + 2\cos^{-3} x - 2a$,

设 $m(x) = h'(x)$, 则 $m'(x) = \sin x - \frac{\cos^4 x - \cos^2 x + 6}{\cos^4 x} > 0$,

故 $m(x) = h'(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, 故 $h'(x) > h'(0) = 2 - 2a$.

当 $a \leq 1$ 时, $2 - 2a \geq 0$, 则 $h'(x) > h'(0) \geq 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增.

所以 $h(x) = g'(x) > h(0) = 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增,

所以 $g(x) > g(0) = 0$.

当 $a > 1$ 时, 取 $\frac{1}{\cos^3 \theta} = 2a$ ($\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$),

则 $h'(\theta) = \frac{\cos^4 \theta - \cos^2 \theta + 2}{\cos^3 \theta} - 2a = \frac{\cos^4 \theta - \cos^2 \theta + 1}{\cos^3 \theta} > 0$,

又因为 $h'(0) = 2 - 2a < 0$, $h'(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增,

故存在 $x_0 \in (0, \theta)$, 使得 $h'(x_0) = 0$.

当 $x \in (0, x_0)$, $h'(x) < 0$, 所以 $h(x)$ 单调递减, 所以 $h(x) = g'(x) < h(0) = 0$.

所以 $g(x)$ 单调递减, 所以 $g(x) < g(0) = 0$, 不符合题意, 故舍去.

综上所述: 实数 a 的取值范围 $(-\infty, 1]$.

(2) 解法 2: 先证: $\sin x < x < \tan x$ ($x \in (0, \frac{\pi}{2})$).

设 $g(x) = x - \sin x$ ($x \in (0, \frac{\pi}{2})$), 则 $g'(x) = 1 - \cos x > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, 又 $g(0) = 0$,

所以 $g(x) > g(0) = 0$, 即 $x > \sin x$.



设 $h(x) = \sin x - x \cos x$ ($x \in (0, \frac{\pi}{2})$), 则 $h'(x) = x \sin x > 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, 又 $h(0) = 0$,

所以 $h(x) > h(0) = 0$, 即 $\sin x > x \cos x$, 即 $\tan x > x$.

综上, $\sin x < x < \tan x$ ($x \in (0, \frac{\pi}{2})$).

……6分

当 $a > 1$ 时, 由 $\sin x < x$,

得 $f(x) = \sin^2 x - ax^2 \cos x < x^2 - ax^2 \cos x = ax^2 (\frac{1}{a} - \cos x)$,

因为 $a > 1$, 所以 $0 < \frac{1}{a} < 1$,

所以存在 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 使得 $\cos \theta = \frac{1}{a}$, 即 $\frac{1}{a} - \cos \theta = 0$,

所以 $f(\theta) < 0$, 不符合题意, 舍去.

……9分

当 $a \leq 1$ 时, 因为 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$,

所以 $f(x) = \sin^2 x - ax^2 \cos x \geq \sin^2 x - x^2 \cos x$,

设 $\varphi(x) = \sin^2 x - x^2 \cos x$ ($x \in (0, \frac{\pi}{2})$),

则 $\varphi'(x) = 2 \sin x \cos x - 2x \cos x + x^2 \sin x$

$= \cos x (2 \sin x - 2x + x^2 \tan x)$,

因为 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $x < \tan x$,

所以 $2 \sin x - 2x + x^2 \tan x > 2 \sin x - 2x + x^3$,

设 $\omega(x) = 2 \sin x - 2x + x^3$ ($x \in (0, \frac{\pi}{2})$),

则 $\omega'(x) = 2 \cos x - 2 + 3x^2$,

设 $\delta(x) = \omega'(x) = 2 \cos x - 2 + 3x^2$,

则 $\delta'(x) = 6x - 2 \sin x > 6x - 2x = 4x > 0$,

所以 $\delta(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, 又 $\delta(0) = 0$,

所以 $\delta(x) > 0$, 即 $\omega'(x) > 0$,

所以 $\omega(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, 又 $\omega(0) = 0$,

所以 $\omega(x) > 0$, 所以 $2 \sin x - 2x + x^2 \tan x > 0$,

所以 $\varphi'(x) > 0$, 所以 $\varphi(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增,

又 $\varphi(0) = 0$, 所以 $\varphi(x) > 0$,

又 $f(x) \geq \varphi(x)$, 所以 $f(x) > 0$.

综上, a 的取值范围为 $(-\infty, 1]$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线