

## 2023 年 4 月稽阳联谊学校高三联考 数学试题卷

命题人: 新昌中学 张伯桥 萧山中学 王芳 嵊州中学 吕金晶

审题人: 诸暨中学 寿啸天

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合  $A = \{x | \log_2(2x-1) \leq 3\}$ ,  $B = \{x | 3-2x \geq 1\}$ , 则  $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) =$   
 A.  $\left(1, \frac{9}{2}\right]$                       B.  $\left(2, \frac{7}{2}\right]$                       C.  $\left(1, \frac{7}{2}\right]$                       D.  $\left(2, \frac{9}{2}\right]$
2. 若复数  $z$  满足  $i \cdot \bar{z} = 1 - 2i$ , 则  $z =$   
 A.  $-2 - i$                       B.  $-2 + i$                       C.  $2 + i$                       D.  $2 - i$
3. 在正方形  $ABCD$  中,  $O$  为两条对角线的交点,  $E$  为边  $BC$  上中点, 记  $\overrightarrow{AC} = \vec{m}, \overrightarrow{DO} = \vec{n}$ , 则  $\overrightarrow{AE} =$   
 A.  $\frac{1}{4}\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{n}$                       B.  $\frac{1}{4}\vec{m} - \frac{1}{2}\vec{n}$                       C.  $\frac{3}{4}\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{n}$                       D.  $\frac{3}{4}\vec{m} - \frac{1}{2}\vec{n}$
4. 双曲函数是一类与常见三角函数类似的函数, 在生活中有着广泛的应用, 如悬链桥。常见的有双曲正弦函数  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ , 双曲余弦函数  $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 。下列结论不正确的是  
 A.  $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$   
 B.  $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$   
 C. 双曲正弦函数是奇函数, 双曲余弦函数是偶函数  
 D. 若点  $P$  在曲线  $y = \sinh x$  上,  $\alpha$  为曲线在点  $P$  处切线的倾斜角, 则  $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$



第 4 题图

5. 甲、乙、丙 3 人站到共有 6 级的台阶上, 同一级台阶上的人不区分站的位置, 则不同的站法种数是  
 A. 120                      B. 210                      C. 211                      D. 216
6. 函数  $f(x) = 2\sin(2x + \varphi)$  ( $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的图象向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度后对应的函数是奇函数, 函数  $g(x) = (1 + \sqrt{3})\cos 2x$ . 若关于  $x$  的方程  $f(x) + g(x) = -\frac{1}{2}$  在  $[0, \pi)$  内有两个不同的解  $\alpha, \beta$ , 则  $\cos(\alpha - \beta)$  的值为

数学试题卷 第 1 页 (共 4 页)

- A.  $-\frac{\sqrt{2}}{4}$       B.  $\frac{\sqrt{2}}{4}$       C.  $\frac{1}{2}$       D.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

7. 已知  $\ln x - ax^2 - b \leq 0$  在  $(0, +\infty)$  上恒成立, 则  $a+2b$  的最小值是

- A. 0      B. -1      C.  $-\ln 4$       D.  $-\ln 2$

8. 《九章算术》中, 将底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称之为阳马, 将四个面都为直角三角形的四面体称之为鳖臑. 现有鳖臑  $S-ABC$ , 其中  $SA \perp$  平面  $ABC$ ,  $AB \perp BC$ , 过  $A$  作  $AD \perp SB$ ,  $AE \perp SC$ , 记四面体  $S-ADE$ , 四棱锥  $A-BCED$ , 鳖臑  $S-ABC$  的外接球体积分别为  $V_1, V_2, V$ , 则  $\frac{V_1+V_2}{V}$  的取值范围是

- A.  $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$       B.  $(1, \sqrt{2}]$       C.  $[\sqrt{2}, 2)$       D.  $[\sqrt{3}, 2)$

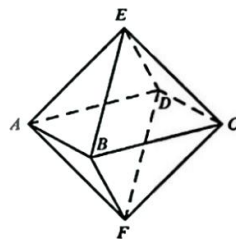
二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知某地区某周 7 天每天的最高气温分别为 23, 25, 13, 10, 13, 12, 19 (单位  $^{\circ}\text{C}$ ). 则

- A. 该组数据的平均数为  $\frac{115}{7}$       B. 该组数据的中位数为 13  
C. 该组数据的第 70 百分位数为 16      D. 该组数据的极差为 15

10. 如图, 多面体  $ABCDEF$  的 8 个面都是边长为 2 的正三角形, 则

- A.  $AE \parallel CF$   
B. 平面  $EAB \perp$  平面  $FAB$   
C. 直线  $EA$  与平面  $ABCD$  所成的角为  $\frac{\pi}{4}$   
D. 点  $E$  到平面  $ABF$  的距离为  $\frac{2\sqrt{6}}{3}$



第 10 题图

11. 定义: 若存在正实数  $M$  使  $a_n \leq M (n \in \mathbf{N}^*)$ , 则称正数列  $\{a_n\}$  为有界正数列. 已知数列  $\{a_n\}$

满足  $a_n = \frac{\ln(n^2+1)}{n+1}$ ,  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和. 则

- A. 数列  $\{a_n\}$  为递增数列      B. 数列  $\{S_n\}$  为递增数列  
C. 数列  $\{a_n\}$  为有界正数列      D. 数列  $\{S_n\}$  为有界正数列

12. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x+k-\frac{2}{3}, & 2k \leq x < 2k+\frac{4}{3}, \\ 2x-2k-\frac{8}{3}, & 2k+\frac{4}{3} \leq x < 2k+2, \end{cases} (k \in \mathbf{Z})$ , 则

- A.  $f(x)$  是单调递增函数      B.  $f(f(x+2)) = x$   
C.  $f(x) \leq x-1$       D.  $f(x) + f(x+1) \leq 2x$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 命题“ $\forall x \in (1, +\infty), x > 0$ ”的否定为 ▲.

14. 已知甲盒中有 3 个红球 2 个白球, 乙盒中有 4 个红球 1 个白球, 从甲盒中随机取 1 球放入乙盒, 然后再从乙盒中随机取 2 球, 记取到红球的个数为随机变量  $X$ , 则  $X$  的期望为 ▲.

15. 已知正数  $x, y$  满足  $x(x+2y)=9$ , 则  $\frac{y}{(x+y)^2}$  的最大值为 ▲.

16. 已知椭圆  $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左, 右焦点为  $F_1, F_2$ , 上顶点为  $P$ , 直线  $PF_1$  交  $\Gamma$  于点  $Q$ , 若  $5|QF_2| = 4|PQ|$ , 则椭圆  $\Gamma$  的离心率是 ▲.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 已知  $S_n + 1 = 2a_n (n \in \mathbb{N}^*)$ .

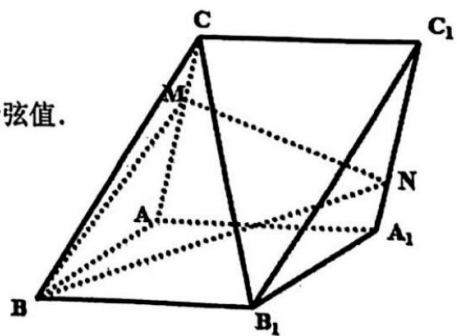
(I) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(II) 设  $b_n = \begin{cases} a_n, & n \text{ 为奇数,} \\ n, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$  求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ .

18. (12 分) 如图, 直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $AA_1 = AB = AC$ ,  $\overline{AM} = 2\overline{MC}$ ,  $\overline{C_1N} = 2\overline{NA_1}$ .

(I) 证明:  $B_1C \parallel$  平面  $BMN$ ;

(II) 若  $BC = \sqrt{3}AB$ , 求二面角  $B - MN - A$  的余弦值.



第 18 题图

19. (12分) 记 $\triangle ABC$ 的内角 $A, B, C$ 的对边分别为 $a, b, c$ , 已知 $\cos 2A - \cos 2B = 8 \sin B \sin C \cos A$ .

(I) 证明:  $\tan A = -3 \tan B$ ;

(II) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{a^2}{6}$ , 求 $B$ .

20. (12分) 甲、乙两个学校分别有 $n+1$ 位同学和 $n$ 位同学参加某项活动, 假定所有同学成功的概率都是 $\frac{1}{2}$ , 所有同学是否成功互不影响. 记事件 $A$ ="甲成功次数比乙成功次数多一次", 事件 $B$ ="甲成功次数等于乙成功次数".

(I) 若 $n=3$ , 求事件 $A$ 发生的条件下, 恰有5位同学成功的概率;

(II) 证明:  $P(A) = P(B)$ .

21. (12分) 已知 $F$ 为抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点, 过点 $P(-1, 1)$ 的直线与抛物线 $C$ 交于不同的两点 $A, B$ , 满足 $\frac{|AF|}{|AP|} = \frac{|BF|}{|BP|}$ .

(I) 求抛物线 $C$ 的方程;

(II) 过点 $B$ 且斜率为2的直线与直线 $PF$ 交于点 $Q$ ,  $\overline{BQ} = \overline{QM}$ , 证明: 直线 $AM$ 经过定点.

22. (12分) 已知 $f(x) = (e^x - 1) \sin x$ ,  $x \in (0, 2\pi)$ .

(I) 求 $f(x)$ 在点 $P(\pi, f(\pi))$ 的切线方程;

(II) 设 $g(x) = f(x) - x^2$ ,  $x \in (0, 2\pi)$ , 判断 $g(x)$ 的零点个数, 并说明理由.



## 关于我们

自主招生在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址: [www.zizs.com](http://www.zizs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主招生领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号: **zizzsw**。

