

数学试卷

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x < 4\}$, $B = (-2, 2)$, 则 $A \cup B =$

- A. $(-2, 4)$ B. $(-4, 2)$ C. $(-2, 2)$ D. $(-4, 4)$

2. 已知复数 z_1, z_2 满足 $|z_1| = 3, z_2 = 2 + i$, 则 $|z_1 \cdot z_2| =$

- A. $3\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{6}$ C. $3\sqrt{5}$ D. 6

3. 已知一个足球场地呈南北走向。在一次进攻时, 某运动员从 A 点处开始带球沿正北方向行进 16 米到达 B 处, 再转向北偏东 60° 方向行进了 24 米到达 C 处, 然后起脚射门, 则 A, C 两点的距离为

- A. $8\sqrt{7}$ 米 B. $8\sqrt{10}$ 米 C. 32 米 D. $8\sqrt{19}$ 米

4. 已知抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 F , 准线为 l , 点 $P(x_0, 1)$ 在 C 上, 过 P 作 l 的垂线, 垂足为 Q , 若 $|PO| = |PQ|$ (O 为原点), 则 F 到 l 的距离为

- A. 1 B. 2 C. 4 D. 6

5. 有一个棱柱形状的石料, 底面是边长为 6 的等边三角形, 该石料侧棱垂直于底面, 若可以将该石料打磨成四个半径为 $\sqrt{3}$ 的石球, 则至少需要打磨掉的石料废料的体积为

- A. $216 - 4\sqrt{3}\pi$ B. $216 - 16\sqrt{3}\pi$ C. $270 - 16\sqrt{3}\pi$ D. $270 - 4\sqrt{3}\pi$

6. 已知向量 $a = (1, \sqrt{2}), b = (\cos \theta, \sin \theta)$, 其中 $\theta \in (0, 2\pi)$. 若 $a \cdot b = |a|$, 则 $\tan \theta =$

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\sqrt{6}$

7. 现有甲、乙两组数据, 每组数据均由六个数组成, 其中甲组数据的平均数为 3, 方差为 5, 乙组数据的平均数为 5, 方差为 3. 若将这两组数据混合成一组, 则新的一组数据的方差为

- A. 3.5 B. 4 C. 4.5 D. 5

数学试题 (新高考卷) 第 1 页 (共 4 页)

8. 已知椭圆 $M: \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 的上顶点为 A , 过点 A 且不与 y 轴重合的直线 l 与 M 的另一个交点为 $B(x_1, y_1)$

(其中 $x_1 > 0$), 过 B 作 l 的垂线, 交 y 轴于点 C . 若 $|BC| = 2\sqrt{3}$, 则 l 的斜率 $k =$

- A. $-2\sqrt{3}$ B. $-\sqrt{3}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q > 0)$, 前 n 项积为 T_n , 若 $T_7 > T_6 > T_8$, 则

- A. $0 < q < 1$ B. $q > 1$
C. $T_{13} > 1 > T_{14}$ D. $T_{14} > 1 > T_{15}$

10. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($-\frac{15}{4} \leq \omega \leq -3, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象关于点 $(-\frac{\pi}{3}, 0)$ 对称, 且存在 $t > 0$, 使得

$f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{3} - t, -\frac{\pi}{3} + t]$ 上单调递增, 则下列选项正确的是

- A. $f(x)$ 的最小正周期 $T \in [\frac{8\pi}{15}, \frac{2\pi}{3}]$
B. $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}]$ 上单调递增
C. 函数 $f(x)$ 的图象不可能关于点 $(\frac{7\pi}{10}, 0)$ 对称
D. 函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内不存在极值点

11. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 直线 $y = t (t \in (0, 2))$ 与椭圆 C 交于 A, B 两点 (其中

A 在 B 的左侧), 记 $\triangle ABF_1$ 面积为 S , 则

- A. $|F_1A| + |F_1B| = 4\sqrt{2}$ B. $AF_1 \perp BF_1$ 时, $t = \sqrt{3}$
C. S 的最大值为 $2\sqrt{2}$ D. 当 $\angle F_1AF_2 = \frac{\pi}{3}$ 时, $S = \frac{8}{3}$

2. 已知函数 $f(x) = \frac{x+1}{e^{x-1}} - ax - 1$, 则下列说法正确的是

- A. 若 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上单调递增, 则 $a \leq -1$
- B. 若 $0 < a < 2$, 设 $f(x) > a - 1$ 的解集为 $(m, n) (n > m)$, 则 $n - m > 2$
- C. 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_2 > 2x_1$, 则 $a \in \left(-\frac{e \ln 2}{2}, 0\right)$
- D. 若 $a = 1$, 则过 $(0, 3)$ 仅能做曲线 $y = f(x)$ 的一条切线

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. A, B 两篮球运动员在球衣号分别为 6, 8, 9, 18 的四件球衣中各随机选一件, 则 A 选的是偶数号球衣的不同选法共有 _____ 种.
14. 已知直线 $ax + 2by - 1 = 0 (a > 0, b > 0)$ 过定点 $(2, 1)$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b}$ 的最小值为 _____.
15. 若在圆 $C: x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 上存在一点 P , 使得过点 P 作圆 $M: (x-2)^2 + y^2 = 1$ 的切线长为 $\sqrt{2}$, 则 r 的取值范围为 _____.
16. 若曲线 $y = \frac{a}{x} (x > 0)$ 与曲线 $y = 2 \ln x$ 存在公切线, 则 a 的取值范围为 _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $A = \frac{\pi}{3}$, 且 $\triangle ABC$ 的周长为 6.

(1) 证明: $bc + 12 = 4(b + c)$;

(2) 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

3. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数, $a_1 = 1$, $a_{n+1} > a_n$, 且 $a_{n+2} + a_n = a_2 \cdot a_{n+1} (n \in \mathbb{N}^*)$.

(1) 若 $a_2 = 2$, 求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n ;

(2) 若 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ 为等比数列, 且 $\{a_n\}$ 不为等比数列, 求 a_2 的值.

19. (12分)

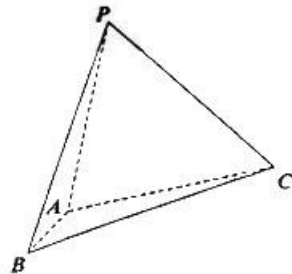
一对夫妻计划进行为期60天的自驾游.已知两人均能驾驶车辆,且约定:①在任意一天的旅途中,全天只由其中一人驾车,另一人休息;②若前一天由丈夫驾车,则下一天继续由丈夫驾车的概率为 $\frac{1}{4}$,由妻子驾车的概率为 $\frac{3}{4}$;③妻子不能连续两天驾车.已知第一天夫妻双方驾车的概率均为 $\frac{1}{2}$.

- (1) 求在刚开始的三天中,妻子驾车天数的概率分布列和数学期望;
- (2) 设在第 n 天时,由丈夫驾车的概率为 p_n ,求数列 $\{p_n\}$ 的通项公式.

20. (12分)

如图,在三棱锥 $P-ABC$ 中,平面 $PAB \perp$ 平面 ABC , $\angle PBA = \angle CBA = 45^\circ$, $BP = BC = 2\sqrt{2}$,
 $AB = 1$.

- (1) 证明: $AB \perp PC$;
- (2) 求二面角 $A-PC-B$ 的余弦值.



21. (12分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦距为8.过左焦点 F 的直线与 C 的左半支交于 A, B 两点,过

A, B 作直线 $l: x = -1$ 的垂线,垂足分别为 M, N ,且当 AB 垂直于 x 轴时, $|MN| = 12$.

- (1) 求 C 的标准方程;
- (2) 设点 $P(2\sqrt{3}-1, 0)$,判断是否存在 $t > 0$,使得 $\frac{1}{|PM| - t} + \frac{1}{|PN| - t}$ 为定值?若存在,求出 t 的值;

若不存在,说明理由.

22. (12分)

设函数 $f(x) = \ln x + 2x^2 - \frac{x}{a} - \frac{b}{x}$,其中 $a > 0, b \in \mathbf{R}$.

- (1) 若 $a = \frac{1}{4}$,且 $f(x)$ 在区间 $(0, t)$ 单调递减,在区间 $(t, +\infty)$ 单调递增,求 t 的最小值;
- (2) 证明:对任意正数 a, b , $f(x)$ 仅存在唯一零点.

数学试题(新高考卷)第4页(共4页)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

