

2023年沈阳市高中三年级教学质量监测（一）

数 学

命题：东北育才学校 王 威
东北育才学校 王成栋
沈阳市第五十六中学 柴 华
主审：沈阳市教育研究院 王孝宇

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。考生作答时，将答案答在答题卡上，在本试卷上答题无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

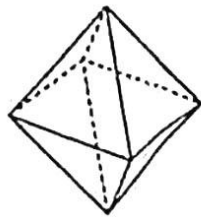
注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考号填写在答题卡上，并将条码粘贴在答题卡指定区域。
2. 第 I 卷每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。第 II 卷用黑色墨水签字笔在答题卡指定位置书写作答，在本试题卷上作答无效。
3. 考试结束后，考生将答题卡交回。

第 I 卷 选择题（共 60 分）

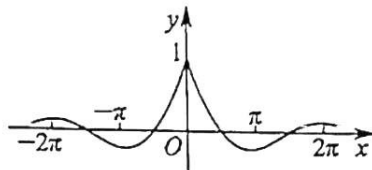
一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - x - 6 < 0\}$ ，集合 $B = \left\{x \mid \frac{x-1}{x+4} \leq 0\right\}$ ，则 $A \cap B =$
 - A. $\{x \mid -4 < x < 3\}$
 - B. $\{x \mid -2 < x < 3\}$
 - C. $\{x \mid -2 < x \leq 1\}$
 - D. $\{x \mid -4 < x \leq 1\}$
2. 已知复数 z 满足 $(z+i)i = 2+3i$ ，则 $|z| =$
 - A. 2
 - B. 3
 - C. $\sqrt{13}$
 - D. $3\sqrt{2}$
3. 命题 p : 直线 $y = kx + b$ 与抛物线 $x^2 = 2py$ 有且仅有一个公共点，命题 q : 直线 $y = kx + b$ 与抛物线 $x^2 = 2py$ 相切，则命题 p 是命题 q 的
 - A. 充分不必要条件
 - B. 必要不充分条件
 - C. 充要条件
 - D. 非充分非必要条件
4. 刻画空间的弯曲性是几何研究的重要内容。用曲率刻画空间弯曲性，规定：多面体顶点的曲率等于 2π 与多面体在该点的面角和的差（多面体的面的内角叫做多面体的面角，角度用弧度制），多面体面上非顶点的曲率均为零，多面体的总曲率等于该多面体各顶点的曲率之和。则正八面体（八个面均为正三角形）的总曲率为
 - A. 2π
 - B. 4π
 - C. 6π
 - D. 8π



5. 如图是函数 $H(x)$ 图像的一部分, 设函数 $f(x) = \cos x$, $g(x) = |x| + 1$, 则 $H(x)$ 可以表示为

- A. $f(x) + g(x)$
B. $f(x) - g(x)$
C. $f(x) \cdot g(x)$
D. $\frac{f(x)}{g(x)}$



6. 甲、乙、丙、丁、戊、己 6 人站成一排拍合照, 要求甲必须站在中间两个位置之一, 且乙、丙 2 人相邻, 则不同的排队方法共有

- A. 24 种 B. 48 种 C. 72 种 D. 96 种

7. 已知 $a = \frac{\ln t}{t}$, $b = \frac{2}{5}$, $c = \ln \frac{3}{2}$, 则 a, b, c 的大小关系为

- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $b < c < a$ D. $c < a < b$

8. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右焦点为 F , 过 F 作倾斜角为 120° 的直线 l 交该椭圆上半部分于点 P , 以 FP , FO (O 为坐标原点) 为邻边作平行四边形 $OFFPQ$, 点 Q 恰好也在该椭圆上, 则该椭圆的离心率为

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\sqrt{3} - 1$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 某产品的质量指标值服从正态分布 $N(100, \sigma^2)$, 则下列结论正确的是
- A. σ 越大, 则产品的质量指标值落在 $(99.9, 100.1)$ 内的概率越大
B. 该产品的质量指标值大于 100 的概率为 0.5
C. 该产品的质量指标值大于 100.01 的概率与小于 99.99 的概率相等
D. 该产品的质量指标值落在 $(99.9, 100.2)$ 内的概率与落在 $(100, 100.3)$ 内的概率相等
10. $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等差数列, 其公差 $d > 0$, $\{b_n\}$ 是等比数列, 若 $a_1 = b_1, a_{2022} = b_{2022}$, 则
- A. $a_{100} > b_{100}$ B. $a_{100} < b_{100}$
C. $a_{2023} > b_{2023}$ D. $a_{2023} < b_{2023}$
11. 已知圆 $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 2$, 点 M 是直线 $l: y = -x - 1$ 上的动点, 过点 M 作圆 C 的两条切线, 切点分别为 A, B , 则下列说法正确的是
- A. 切线长 $|MA|$ 的最小值为 $\sqrt{6}$
B. 四边形 $ACBM$ 面积的最小值为 $2\sqrt{3}$
C. 若 PQ 是圆 C 的一条直径, 则 $\overline{MP} \cdot \overline{MQ}$ 的最小值为 7
D. 直线 AB 恒过 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

12. 声音是由物体振动产生的声波, 纯音的数学模型是函数 $y = A \sin \omega t$, 我们听到的声音是由纯音合成的, 称之为复合音. 若一个复合音的数学模型是函数 $f(x) = 2 \sin x + \sin 2x$. 则下列结论中正确的为
- A. $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上是增函数
- B. $f(x)$ 的最小正周期为 π
- C. $f(x)$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
- D. 若 $f(x_1)f(x_2) = -\frac{27}{4}$, 则 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{2\pi}{3}$.

第 II 卷 非选择题 (共 90 分)

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知向量 $\vec{a} = (\cos \alpha, -2)$, $\vec{b} = (\sin \alpha, 1)$, 且 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则 $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ 等于_____.
14. 若 $(1+x)^{2023} = a_0 + a_1x + \dots + a_{2023}x^{2023}$, 则 $a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2022}$ 被 5 除的余数是_____.
15. 三棱锥 $A-BCD$ 中, $\angle ABC = \angle CBD = \angle DBA = 60^\circ$, $BC = BD = 2$, 点 E 为 CD 中点, $\triangle ABE$ 的面积为 $2\sqrt{2}$, 则 AB 与平面 BCD 所成角的正弦值为_____, 此三棱锥外接球的体积为_____.
16. 已知实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 + xy = 1$, 则 $2x^2 + y^2$ 的最大值为_____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

设 $n \in \mathbb{N}^*$, 向量 $\vec{AB} = (n-1, 1)$, $\vec{AC} = (n-1, 4n-1)$, $a_n = \vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

(1) 令 $b_n = a_{n+1} - a_n$, 求证: 数列 $\{b_n\}$ 为等差数列;

(2) 求证: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < \frac{3}{4}$.

18. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $\sin A + \sqrt{3} \cos A = 0$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 给出以下三个条件:

① $a = 4\sqrt{3}$, $b = 4$; ② $b^2 - a^2 + c^2 + 10b = 0$; ③ $S_{\triangle ABC} = 15\sqrt{3}$.

若这三个条件中仅有两个正确, 请选出正确的条件并回答下面问题:

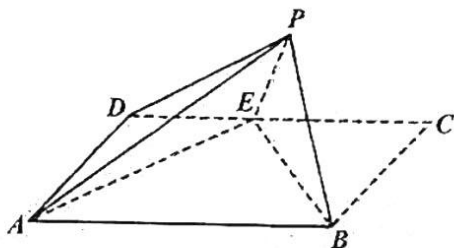
(i) 求 $\sin B$ 的值;

(ii) $\angle BAC$ 的角平分线交 BC 于点 D , 求 AD 长.

19. (12分)

如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=4$, E 为边 CD 上的点, $CB=CE$, 以 BE 为折痕把 $\triangle CBE$ 折起, 使点 C 到达点 P 的位置, 且使二面角 $P-BE-C$ 为直二面角, 三棱锥 $P-ABE$ 的体积为 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

- (1) 证明: 平面 $PAB \perp$ 平面 PAE ;
- (2) 求二面角 $B-PA-D$ 的余弦值.



20. (12分)

2022年12月初某省青少年乒乓球培训基地举行了混双选拔赛, 其决赛在韩菲/陈宇和黄政/孙艺两对组合间进行, 每场比赛均能分出胜负. 已知本次比赛的赞助商提供了10000元奖金, 并规定: ①若其中一对赢的场数先达到4场, 则比赛终止, 同时这对组合获得全部奖金; ②若比赛意外终止时无组合先赢4场, 则按照比赛继续进行各自赢得全部奖金的概率之比给两对组合分配奖金. 已知每场比赛韩菲/陈宇组合赢的概率为 p ($0 < p < 1$), 黄政/孙艺赢的概率为 $1-p$, 且每场比赛相互独立.

- (1) 若在已进行的5场比赛中韩菲/陈宇组合赢3场、黄政/孙艺组合赢2场, 求比赛继续进行且韩菲/陈宇组合赢得全部奖金的概率 $f(p)$;
- (2) 若比赛进行了5场时终止(含自然终止与意外终止), 则这5场比赛中两对组合之间的比赛结果共有多少不同的情况?
- (3) 若比赛进行了5场时终止(含自然终止与意外终止), 设 $p = \frac{1}{2}$, 若赞助商按规定颁发奖金, 求韩菲/陈宇组合获得奖金数 X 的分布列.

21. (12分)

已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为2, 右焦点 F 到渐近线的距离为 $\sqrt{3}$, 过右焦点 F 作斜率为正的直线 l 交双曲线的右支于 A, B 两点, 交两条渐近线于 C, D 两点, 点 A, C 在第一象限, O 为坐标原点.

- (1) 求双曲线 E 的方程;
- (2) 设 $\triangle OAC$, $\triangle OAD$, $\triangle OAB$ 的面积分别是 $S_{\triangle OAC}$, $S_{\triangle OAD}$, $S_{\triangle OAB}$, 若不等式 $\lambda S_{\triangle OAC} \cdot S_{\triangle OAD} \geq S_{\triangle OAB}$ 恒成立, 求 λ 的取值范围.

22. (12分)

已知 $f(x) = (x^2 - 2x) \ln x + (a - \frac{1}{2})x^2 + 2(1-a)x, a > 0$.

- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 若 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线