THUSSAT 中学生标准学术能力测试

中学生标准学术能力测试诊断性测试 2019 年 9 月测试

理科数学（一卷）答案

一．选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
D	B	B	C	D	A	A	C	A	B	C	A

二．填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13. 3

14. $\dfrac{2n^2+3n+1}{3}$

15. $\sqrt{2}$

16. -10

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：60 分．

17.（12 分）

解：(1) 由 $\cos\dfrac{A}{2}-\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， 得 $(\cos\dfrac{A}{2}-\sin\dfrac{A}{2})^2=\dfrac{1}{2}$,即 $1-2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{2}$

$\sin A=\dfrac{1}{2}$， ……………………………3 分

$\because 0<A<\pi$， $\therefore 0<\dfrac{A}{2}<\dfrac{\pi}{2}$， $\because \cos\dfrac{A}{2}-\sin\dfrac{A}{2}>0$， $\therefore 0<\dfrac{A}{2}<\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow 0<A<\dfrac{\pi}{2}$ ，

所以 $A=\dfrac{\pi}{6}$ ……………………………6 分

(2) 由 $\sin(C+A)=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$,得 $\sin B=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$

由正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$,得 $b=\sqrt{3}$ ……………………………8 分

由余弦定理：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，得 $7=3+c^2-3c$， $c=4$ 或 $c=-1$（舍去）

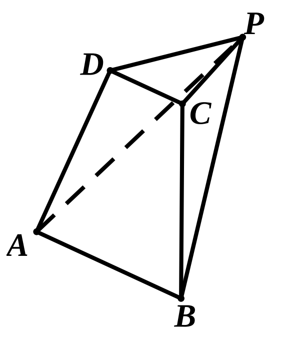
所以 $c=4$ ……………………………12 分

18.（12 分）

解：（1）$\because$ $BC\perp$ 平面 PCD， $\therefore$ $BC\perp PD$，

又 $PD\perp AB$， $AB\cap BC=B$

$\therefore$ $PD\perp$ 平面 $ABCD$， ………2 分



$\therefore\ PD\perp DC$，$\therefore\ \Delta PDC$ 是直角三角形，

由已知 $PC=\sqrt{2},CD=1$，

$\therefore\ PD=1$.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　………………………………4 分

（2）解法 1：

$\because\ BC\perp$ 平面 PCD，$\therefore\ BC\perp CD$，$BC\perp PC$

在四边形 $ABCD$ 中，由于 $AB//CD$，$AB=2,BC=\sqrt{2},CD=1$，

可以求得 $AD=\sqrt{3}$，　　　　　　　　　　　　　　　　　　　………………………………6 分

设 D 到平面 PAB 的距离为 d，直线 AD 与平面 PAB 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=\dfrac{d}{AD}=\dfrac{d}{\sqrt{3}}$，　　　　　　　　　　　　　　　………………………………8 分

$\because\ AB//CD$，$CD\not\subset$ 面 PAB，$AB\subset$ 面 PAB $\therefore\ CD//$ 平面 PAB，$\therefore\ C$ 到平面 PAB 的距离也为 d，

在三棱锥 $B-PAC$ 中，$V_{P-ABC}=V_{C-PAB}$，

$\because\ PD\perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore\ PD\perp AD$ $\therefore\ PA=2$，

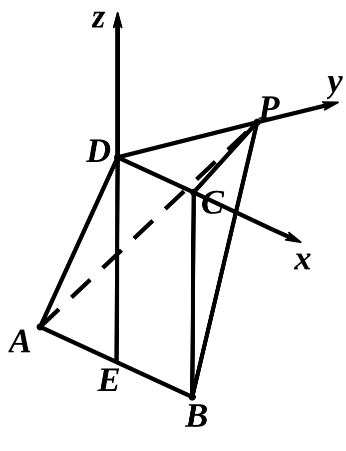
又 $BC=PC=\sqrt{2},BC\perp PC$，$\therefore\ PB=2$，

$\therefore\ V_{P-ABC}=\dfrac{1}{3}PD\times S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{3}\times 1\times\dfrac{1}{2}\times 2\times\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，　………………………………10 分

$V_{C-PAB}=\dfrac{1}{3}dS_{\Delta PAB}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}d$，　　　　　　　　　　　　………………………………11 分

$\therefore\ d=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，$\therefore\ \sin\theta=\dfrac{d}{AD}=\dfrac{d}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，

即直线 AD 与平面 PAB 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.　　　　　………………………………12 分



解法 2：由（Ⅰ）知 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，过 D 作 $DE\perp AB$ 交 AB 于 E，则 $PD\perp DE$，

如图以 D 为原点，DC、DP、DE 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系.　　………………5 分

则 $C(1,0,0),A(-1,0,-\sqrt{2}),B(1,0,-\sqrt{2}),P(0,1,0)$，

则 $\overrightarrow{AB}=(2,0,0),\overrightarrow{AP}=(1,1,\sqrt{2}),\overrightarrow{DA}=(-1,0,-\sqrt{2})$，………6 分

设平面 PAB 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则由 $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0,\\ \overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=0,\\ x+y+\sqrt{2}z=0,\end{cases}$

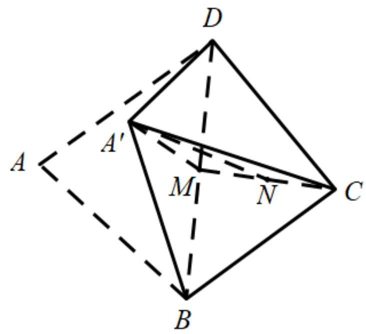
令 $z=1$，可得 $\vec{n}=(0,-\sqrt{2},1)$， ………………………10 分

设直线 AD 与平面 PAB 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=|\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{DA}}{|\vec{n}||\overrightarrow{DA}|}|=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$． 即直线 AD 与平面 PAD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ …12 分

19.（12 分）

解：



第 19 题

（1）由题意，得：$S_n=\dfrac{t}{t-1}(a_n-2)(t为常数，且t\neq 0,t\neq 1)$

当 $n=1$ 时，得 $S_1=\dfrac{t}{t-1}(a_1-2)$，得 $a_1=2t$ ………2 分

由 $\begin{cases}S_n=\dfrac{t}{t-1}(a_n-2)\\ S_{n-1}=\dfrac{t}{t-1}(a_{n-1}-2)(n\geq 2)\end{cases}$， $S_n\text{-}S_{n-1}=a_n=\dfrac{t}{t-1}(a_n-a_{n-1})$,

$\therefore a_n=ta_{n-1}$ （$n\geq 2$） ………………………………4 分

故 $a_n=2t^n$ ………………………………5 分

（2）由 $b_n=1-S_n=1-\dfrac{t}{t-1}(2t^n-2)=1-\dfrac{2t}{t-1}(t^n-1)$ ………………………………7 分

由 $\{b_n\}$ 为等比数列可知：$b_2^2=b_1b_3$ ，求得 $t=\dfrac{1}{3}$ ………………………………9 分

所以，$b_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$，$a_n=\dfrac{2}{3^n}$，则 $c_n=\dfrac{2}{3^n}\cdot\left|\log_3\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right|=\dfrac{2n}{3^n}$ ………………10 分

设 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，则 $T_n=\dfrac{2}{3^1}+\dfrac{4}{3^2}+\cdots+\dfrac{2n}{3^n}$

$\dfrac{1}{3}\mathrm{T}_n=\dfrac{2}{3^2}+\dfrac{4}{3^3}+\cdots+\dfrac{2n}{3^{n+1}}$，相减可得

$\mathrm{T}_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=\dfrac{3}{2}-\dfrac{2n+3}{2\cdot 3^n}<\dfrac{3}{2}$ ………………12 分

20.（12 分）

解：

（1）$\because f'(x)=\dfrac{e(1-x)}{e^x}$ ……………………2 分

$\therefore x<1$时，$f'(x)>0; x>1$时，$f'(x)<0$

$\therefore f(x)$在$(-\infty,1)$递增，$(1,+\infty)$递减，且 $f(x)_{\max}=f(1)=1$

又$\because$ 当 $x\le 0$ 时，$f(x)\le 0$；当 $x>0$ 时，$f(x)>0$，且 $x\to+\infty$时，$f(x)\to 0$，4 分

若 $t<0$，则 $x_1,x_2<0$，而 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 递增，与 $f(x_1)=f(x_2)$ 矛盾，

$\therefore 0<t<1$………5 分

（2）由（1）知：$0<x_1<1<x_2$，$\therefore 0<\dfrac{x_2}{2x_2-1}<1$

要证：$2x_1x_2<x_1+x_2$ 成立，只需证：$x_1<\dfrac{x_2}{2x_2-1}<1$ ……………………6 分

$\because f(x)$在$(-\infty,1)$递增，故只需证：$f(x_2)=f(x_1)<f\left(\dfrac{x_2}{2x_2-1}\right)$

即证：$e^{\frac{1}{2}\left[(2x_2-1)-\frac{1}{2x_2-1}\right]}-(2x_2-1)>0$ ……………………8 分

令 $u=2x_2-1>1$，只需证：$e^{\frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)}-u>0(u>1)$，即证：

$\ln u-\dfrac{1}{2}\left(u-\dfrac{1}{u}\right)<0(u>1)$ ……………………10 分

令 $\varphi(u)=\ln u-\dfrac{1}{2}\left(u-\dfrac{1}{u}\right)$ $\because \varphi'(\mathrm{u})=-\dfrac{(u-1)^2}{2u^2}<0,$

$\therefore \varphi(u)$在（$1,+\infty$）上单调递减

$\therefore \varphi(\mathrm{u})<\varphi(1)=0.$ 证毕 ……………………12 分

（其他证法酌情给分）

21.（12 分）

解：（1）解法 1：$\because CD//AB$，设 $\overrightarrow{PC}=\lambda\overrightarrow{CA},\overrightarrow{PD}=\lambda\overrightarrow{DB},A(x_1,y_1)B(x_2,y_2),P(x_0,y_0)$

由$\begin{cases}y=kx+1\\x^2=4y\end{cases}\Rightarrow x^2-4kx-4=0$ $\therefore\begin{cases}x_1+x_2=4k\\x_1\cdot x_2=-4\end{cases}$ ……………………2 分

$C(\frac{x_0+\lambda x_1}{1+\lambda},\frac{y_0+\frac{\lambda}{4}x_1^2}{1+\lambda})$ ……………………3 分（由定比分点公式，或向量相等得到），代入抛物线得：

$(\frac{x_0+\lambda x_1}{1+\lambda})^2=4\cdot\frac{y_0+\frac{\lambda}{4}x_1^2}{1+\lambda}$，化简得：$\lambda x_1^2-2x_0\lambda x_1+4(1+\lambda)y_0-x_0^2=0$……4 分，

同理得：$\lambda x_2^2-2x_0\lambda x_2+4(1+\lambda)y_0-x_0^2=0$

所以 x_1,x_2 为方程 $\lambda x^2-2x_0\lambda x+4(1+\lambda)y_0-x_0^2=0$ 的两根，将 $k=1$ 代入

$x_1+x_2=2x_0=4k=4\therefore x_0=2$ ……………………5 分

且 $x_1x_2=\frac{4(1+\lambda)y_0-x_0^2}{\lambda}=-4$ ①

将 $x_0=2$ 代入①，得 $y_0=\frac{4-4\lambda}{4(1+\lambda)}=\frac{1-\lambda}{1+\lambda}=-1+\frac{2}{1+\lambda}(\lambda>0)$

$\Rightarrow y_0\in(-1,1)$

$\Rightarrow$ 点 P 的轨迹方程为 $x=2(-1<y<1)$ ……………………6 分

解法 2：同解法 1 知 $x_1+x_2=4$ ……………………5 分

$k_{CD}=\frac{y_D-y_C}{x_D-x_C}=\frac{x_D+x_C}{4}=k_{AB}=1\therefore x_C+x_D=4$，设线段 AB,CD 的中点分别为 M,N，

易知 M,N,P 三点共线，$\therefore\overrightarrow{MN}=\mu\overrightarrow{MP}$（$\mu$ 为实数），所以 $x_0=x_M=2$，………6 分，

以下同解法 1.

（2）由 x_1,x_2 为方程 $\lambda x^2-2x_0\lambda x+4(1+\lambda)y_0-x_0^2=0$ 的两根，可得：

$x_1+x_2=2x_0=4k\therefore x_0=2k$. ……………………7 分

由（1）得 $x_1x_2=\frac{4(1+\lambda)y_0-x_0^2}{\lambda}=-4$，$\because\ \overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{CA}$，

$\therefore\ \lambda=2$，得：$y_0=\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}$ ……………………8 分

$\because AC//x$轴且A, C在抛物线上，$\therefore A,C$关于y轴对称，$\because x_c=\dfrac{x_0+\lambda x_1}{1+\lambda}=\dfrac{2k+2x_1}{3}$，

$\therefore \dfrac{2k+2x_1}{3}=-x_1 \Rightarrow x_1=-\dfrac{2k}{5}\ \therefore C(\dfrac{2k}{5},\dfrac{k^2}{3}-\dfrac{2}{3})$. $\because C$在抛物线上，

$\therefore (\dfrac{2k}{5})^2=4(\dfrac{k^2}{3}-\dfrac{2}{3}) \Rightarrow k^2=\dfrac{25}{11}$ ……………………12 分

设 AB 的中点为 M，则 $y_M=\dfrac{1}{2}\cdot(\dfrac{x_1{}^2+x_2{}^2}{4})=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{4}=2k^2+1$，又

$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=4\sqrt{k^2+1}$

$\therefore S_{\Delta PAB}=\dfrac{1}{2}|x_1-x_2|\cdot|y_M-y_0|=\dfrac{1}{2}\cdot 4\sqrt{k^2+1}\cdot\left|2k^2+1-\dfrac{k^2}{3}+\dfrac{2}{3}\right|=\dfrac{10}{3}(\sqrt{k^2+1})^3=\dfrac{720\sqrt{11}}{121}$

……………………12 分

（二）选考题：共 10 分.请考生在第 22，23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.作答时请写清题号.

22.【选修 4−4：坐标系与参数方程】（10 分）

解：（1）由 $\rho^2=\dfrac{12}{3+\sin^2\theta}$，可得：$\rho^2(3+\sin^2\theta)=12$，

$3x^2+4y^2=12$，即曲线 C 的直角坐标方程为：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ …………4 分

（2）将直线 l 的参数方程 $\begin{cases} x=t\cos\alpha, \\ y=1+t\sin\alpha \end{cases}$ 代入 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，可得：

$$(3\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha)t^2+8\sin\alpha\cdot t-8=0$$

依题意，$\triangle>0$，设 A, B 对应的参数分别为 t_1,t_2，

则 $\begin{cases} t_1+t_2=\dfrac{-8\sin\alpha}{3\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha} \\ t_1\cdot t_2=\dfrac{-8}{3\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha} \end{cases}$ ………………………………………6 分

$$|AB|=|t_1-t_2|=\sqrt{\left(\frac{8\sin\alpha}{3\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha}\right)^2+\frac{32}{3\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha}}$$

$=\dfrac{4\sqrt{6}\sqrt{2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}}{3\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha}=\dfrac{4\sqrt{6}\sqrt{\sin^2\alpha+1}}{3+\sin^2\alpha}$ ……………………………8 分

令 $\sqrt{1+\sin^2\alpha}=s$， $s\in[1,\sqrt{2}]$，

则 $|AB|=4\sqrt{6}\cdot\dfrac{s}{2+s^2}=4\sqrt{6}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{2}{s}+s}\in\left[\dfrac{4\sqrt{6}}{3},2\sqrt{3}\right]$

当 $s=\sqrt{2}$ 时，$|AB|$ 取最大值 $2\sqrt{3}$ ；当 $s=1$ 时，$|AB|$ 取最小值 $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$ ……10 分

23.【选修 4–5：不等式选讲】（10 分）

（1）证明：$\dfrac{abc}{bc+ca+ab}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}$.

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c})(a+b+c)\ge(1+1+1)^2=9$，

当且仅当 $a=b=c=\dfrac{1}{3}$ 时，“=”成立 ……………………………………3 分

$\therefore\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}\le\dfrac{1}{9}$. $\therefore\dfrac{abc}{bc+ca+ab}\le\dfrac{1}{9}$. ……………………………………5 分

（2）解：依题意得：存在非零实数 t 使不等式

$|x-1|-|2x+3|\ge\dfrac{|2t-1|+|1-t|}{|t|}$ 成立

$\because\dfrac{|2t-1|+|1-t|}{|t|}\ge\dfrac{|2t-1+1-t|}{|t|}=1$

$\therefore$ 只需 $|x-1|-|2x+3|\ge1$……6 分

当 $x\le-\dfrac{3}{2}$ 时，原式 $1-x+2x+3\ge1$，即 $x\ge-3$ $\therefore-3\le x\le-\dfrac{3}{2}$ ………………7 分

当 $-\dfrac{3}{2}<x<1$ 时，原式 $1-x-2x-3\ge1$，即 $x\le-1$ $\therefore-\dfrac{3}{2}<x\le-1$ ………………8 分

当 $x\ge1$ 时，原式 $x-1-2x-3\ge1$，即 $x\le-5$ $\therefore x\in\varnothing$ ………………………9 分

综上所得，x 的取值范围为 $[-3,-1]$ ……………………………………10 分