山东中学联盟2020级高三12月百校大联考

数学答案解析

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8
C	C	B	A	B	C	D	D

1.【答案】C

【解析】由不等式 $x^2-5x+6\le 0$，解得 $2\le x\le 3$，即 $A=\{x|2\le x\le 3\}$，又 $\log_2(x-1)\ge 0$，故

$\log_2(x-1)\ge 0=\log_2 1$，解得 $x\ge 2$，即 $B=\{x\mid x\ge 2\}$，所以 $A\cup B=[2,+\infty)$ 故选 C.

2.【答案】C

【解析】$z=\dfrac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i},\bar{z}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$，故选 C.

3.【答案】B

【解析】因为 $f(x)=\mathrm{e}^x-(a-3)x-3$，所以 $f'(x)=\mathrm{e}^x-(a-3)$，若 $f(x)$ 在 R 上单调递增，

则 $f'(x)=\mathrm{e}^x-(a-3)\ge 0$ 恒成立，所以 $a-3\le 0$，解得 $a\le 3$，因为 $(-\infty,3]\subsetneqq(-\infty,4]$，

所以"$a\le 4$"是"函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-(a-3)x-3$ 是 R 上的单调增函数"的必要不充分条件，故选 B.

4.【答案】A

【解析】由 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}|\boldsymbol{b}|$ 得 $\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=3\boldsymbol{b}^2$，代入 $|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$ 得 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=-\dfrac{1}{2}$，$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影向量为 $-\boldsymbol{b}$，故选 A.

5.【答案】B

【解析】因为数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，则 $a_2a_8=a_3a_7=a_4a_6=a_5{}^2=a_1a_9=4$，$a_5=a_1\times q^4>0$，所以

$a_5=2$，所以 $a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8=128$，故选 B.

6.【答案】C

【解析】化简 $y=(\sin x+\cos x)^2+2\cos^2 x=\sin 2x+\cos 2x+2=\sqrt{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})+2$

$2x+\dfrac{\pi}{4}=k\pi$，解得 $x=-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}$，所以一个对称中心为（$\dfrac{7\pi}{8}$,2），故选 C.

7.【答案】D

【解析】设$AB=c,AC=b,BC=a$,则$b^2=a^2+c^2,c+a-b=2,\therefore c+a=2+b$,所以

$a+c=7,b^2=a^2+c^2=(a+c)^2-2ac=49-2ac=25$,所以$ac=12$.

所以$V_{A-A_1BC}=V_{A_1-ABC}=\frac{1}{3}A_1A\cdot S_{\Delta ABC}=\frac{2}{3}\times 6=4$.故选 D.

8.【答案】D

【解析】令$x=y=0$，有$2f(0)=f(0)$，$\therefore f(0)=0$；令$y=-x$，则$f(x)+f(-x)=f(0)=0$，所以$f(x)$为奇函数；不妨令$-1<x<y<1$，则$f(x)-f(y)=f(x)+f(-y)=f(\frac{x-y}{1-xy})$，因为$-1<\frac{x-y}{1-xy}<0$，所以$f(\frac{x-y}{1-xy})>0$，所以$f(x)>f(y)$，所以$f(x)$单调递减．因为$2f(\tan\alpha)=f(\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha})>f(\tan 2\alpha)$，$\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,则首先满足$-1<\tan\alpha<1$，$-1<\tan 2\alpha<1$

解得$\alpha\in\left(-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{8}\right)$，因为$f(x)$单调递减，所以$\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}<\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$，解得$0<\alpha<\frac{\pi}{8}$.故选 D.

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9	10	11	12
BD	BC	ACD	ABD

9. 【答案】BD

【解析】A. $y=x+\frac{4}{x}$, 当$x<0$时$y\le -4$, 不符合题意；

B. $y=\frac{x+5}{\sqrt{x+1}}=\frac{x+1+4}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{x+1}+\frac{4}{\sqrt{x+1}}\ge 4$, 当$x=3$时取等号, 符合题意；

C. $y=\sin x+\frac{4}{\sin x}\ge 2\sqrt{\sin x\cdot\frac{4}{\sin x}}\ge 4$ 当$\sin x=2$时取等号，$0<\sin x\le 1$，所以不符合题意；

D. $y=4^x+4^{1-x}\ge 2\sqrt{4}=4$, 当且仅当$x=\frac{1}{2}$时取等号, 符合题意. 故选 BD.

10.【答案】BC

【解析】A 选项中，要求函数$y=\sin(\frac{\pi}{3}-2x)$的单调递增区间，首先要把$y=\sin(\frac{\pi}{3}-2x)$化简为$y=-\sin(2x-\frac{\pi}{3})$，单调递增区间为$\left[\frac{5\pi}{12}+k\pi,\frac{11\pi}{12}+k\pi\right]k\in Z$，故 A 选项错误；

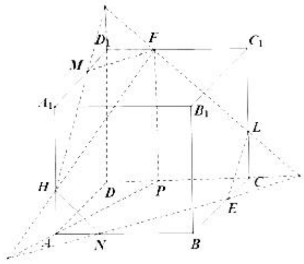
B 选项中，将函数 $y=\sin 7x$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位，得到函数

$y=\sin(7(x-\dfrac{\pi}{3}))=\sin(7x-\dfrac{7\pi}{3})=\sin(7x-\dfrac{\pi}{3})$；所以为 $y=\sin(7x-\dfrac{\pi}{3})$ 的图象；故 B 选项正确；

C 选项中 $y=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x=\sin x(1+\cos x)=0,\therefore \sin x=0$ 或 $\cos x=-1$ 在 $[0,2\pi]$ 上，$x=0,\pi,2\pi$，所以有 3 个零点；故 C 选项正确；

D 选项中，化简可得 $y=|\sin x|+|\cos x|$，因为 $f(x+\dfrac{\pi}{2})=f(x)$，所以 π 不是它的最小正周期.故选 BC.

11.【答案】ACD



【解析】设 $CE=D_1F=AH=a(0\le a\le 2)$，以 D 为坐标原点，DA,DC,DD_1 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系．$B_1(2,2,2),E(a,2,0),F(0,a,2),H(2,0,a)$，所以 $\overrightarrow{DB_1}=(2,2,2),\overrightarrow{EF}=(-a,a-2,2),\overrightarrow{FH}=(2,-a,a-2)$，$\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{EF}=-2a+2(a-2)+4=0$, 所以 $DB_1\perp EF$. 因为 $\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{FH}=0$, 所以 $DB_1\perp FH$. 所以 $DB_1\perp$平面EFH.

$\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{EF}=-2a+2(a-2)+4=0,\therefore DB_1\perp EF\because \overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{FH}=0,\therefore DB_1\perp FH.\therefore DB_1\perp$平面$EFH$. 故 A 选项对；

当 $a=0$ 时，平面 EFH 即平面 D_1AC，当 $a=2$ 时，平面 EFH 即平面 BA_1C_1，当 $0<a<2$ 时，平面 EFH 在平面 D_1AC 与平面 BA_1C_1 之间，故点 D 到平面 EFH 的距离的取值范围为 $\left[\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right],1<\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. 故$B$错.

由对称性知当 E、F、H 为棱的中点时，此时截面为边长 $\sqrt{2}$ 的正六边形，截面面积最大为 $3\sqrt{3}$，C 对；

对 D，当 $a=0$ 时，截面为 ΔD_1AC，周长为 $6\sqrt{2}$，当 $a=2$ 时，截面为 ΔBA_1C_1 周长为 $6\sqrt{2}$，

当 $0<a<2$ 时，截面为如图所示的六边形，$\dfrac{MF}{A_1C_1}=\dfrac{D_1M}{D_1A_1}\Rightarrow MF=\sqrt{2}a,$

$\frac{MH}{AD_1}=\frac{A_1M}{A_1D_1}\Rightarrow MH=\sqrt{2}(2-a)$,所以$MF+MH=2\sqrt{2}$,周长为$6\sqrt{2}$.故 D 对.故选 ACD.

12.【答案】ABD

【解析】因为$f'(x)=1-\frac{1}{x+1},x>-1$，所以$f'(x_{n+1})=1-\frac{1}{x_{n+1}+1}$

因为$\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0}=1-\frac{\ln(x_n+1)}{x_n}$，所以$\frac{1}{x_{n+1}+1}=\frac{\ln(x_n+1)}{x_n}$，$x_{n+1}=\frac{x_n}{\ln(x_n+1)}-1$，

对于选项A,$x_2=\frac{1}{\ln 2}-1$,因为$\ln 2<\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$x_2>\sqrt{2}-1$，所以选项A正确；

对于选项B,因为$x_n>\ln(x_n+1)$当$x_n>0$，则$\frac{x_n}{\ln(x_n+1)}>1$,所以$x_{n+1}=\frac{x_n}{\ln(x_n+1)}-1>0$

若$x_n<0$,则$\frac{x_n}{\ln(x_n+1)}<1$,$\therefore x_{n-1}=\frac{x_n}{\ln(x_n+1)}-1<0$，因为$x_1>0$,则$x_2>0$，则$x_3>0$，依次类推$x_n>0$，所以选项 B 正确；

对于选项C,$\frac{x_{n+1}}{x_n}-\frac{1}{2}=\frac{1}{\ln(x_n+1)}-\frac{1}{x_n}-\frac{1}{2}=\frac{2x_n-(x_n+2)\ln(x_n+1)}{2x_n\ln(x_n+1)}$

令$t=x_n+1,t>1,h(t)=2t-2-(t+1)\ln t$，因为$\ln t>1-\frac{1}{t},h'(t)=1-\frac{1}{t}-\ln t<0$，所以$h(t)$单调递减，

$h(t)<h(1)=0$，所以$0<\frac{x_{n-1}}{x_n}<\frac{1}{2}$，所以选项$C$错误；

对于选项D,因为$0<\frac{x_{n+1}}{x_n}<\frac{1}{2}$，且$x_n>0$，所以数列$\{x_n\}$为单调递减数列，

所以选项D正确.故选 ABD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.【答案】$\sqrt{3}$

【解析】法 1：因为$A_1C_1 // AC$,所以$\angle DAC=\frac{\pi}{4}$,$DC=AD=1$.

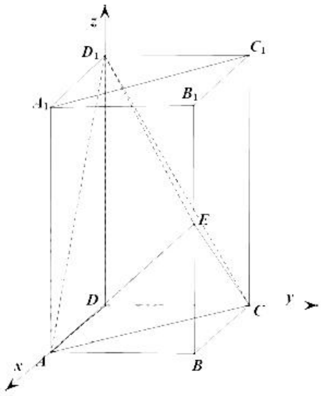
易求得$AE=CE=\sqrt{2}$,$D_1E=\sqrt{3}$,$AD_1=CD_1=\sqrt{5}$.由勾股定理的逆定理得

$D_1E\perp AE$,$D_1E\perp CE$,所以$D_1E\perp$平面ACE.故点D_1到平面ACE的距离为$\sqrt{3}$.

法 2：坐标法：因为$A_1C_1 // AC$,所以$\angle DAC=\frac{\pi}{4}$,$DC=AD=1$.

建系如图$\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$,$\overrightarrow{AE}=(0,1,1)$,$\overrightarrow{D_1A}=(1,0,-2)$，设平面$ACE$的法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}-x+y=0\\ y+z=0\end{cases}$，令$x=1$,则$y=1,z=-1$.$\overrightarrow{m}=(1,1,-1)$ 点D_1到平面ACE的距离为$d=\dfrac{\left|\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{D_1A}\right|}{\left|\overrightarrow{m}\right|}=\sqrt{3}$.



14.【答案】$\dfrac{9}{4}$

【解析】由正实数x，y满足$4x+7y=4$可得$2(x+3y)+(2x+y)=4$令

$x+3y=a,2x+y=b$

则$2a+b=4$，

$\dfrac{2}{x+3y}+\dfrac{1}{2x+y}=\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}=\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\times\left(\dfrac{2a+b}{4}\right)=\dfrac{1}{4}\times\left(4+\dfrac{2b}{a}+\dfrac{2a}{b}+1\right)$

$\geq\dfrac{1}{4}\times\left(4+2\sqrt{\dfrac{2b}{a}\times\dfrac{2a}{b}}+1\right)=\dfrac{9}{4}$当且仅当$\dfrac{2b}{a}=\dfrac{2a}{b}$时取等号，所以答案为$\dfrac{9}{4}$.

15.【答案】$[-2,38]$

【解析】设AB的中点为M,则$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PM}$，$\overrightarrow{PQ}\cdot(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})=2\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PM}$,连接$MQ$,设$MQ$的中点为$G$,$2\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PM}=2[PG^2-MG^2]$,又$MQ=2\sqrt{17},MG=\sqrt{17}$，

$2\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PM}=2(PG^2-MG^2)=2(PG^2-17)$，$PA=1,\therefore PG_{\min}=AG-1=4$，$PG_{\max}=AG+1=6$，所以$\overrightarrow{PQ}\cdot(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})$的取值范围为$[-2,38]$.

16.【答案】101，842

【解析】由$a_2=a_3-a_1$，$a_4=a_5-a_3$，……，$a_{100}=a_{101}-a_{99}$，

可得：$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{100}=a_{101}-a_1$，故$a_1+a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{100}$是斐波那契数列中的第101项；

$a_1=1$，$a_2=1,a_3=2,a_4=3,a_5=5,a_6=8,a_7=13,a_8=21,a_9=34\ \ldots a_{14}=377$.

而$\left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right|\in(0,1)$，所以$\left|\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{14}\right|<0.001$，

所以$\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{14}=\sqrt{5}\times377+\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{14}\approx842.972$，$\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{14}\right]=842$.

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.【解析】因为$4\sqrt{3}S-b^2=c^2-a^2$，所以$4\sqrt{3}S=b^2+c^2-a^2$，由面积公式和

$2\sqrt{3}bc\sin A=2bc\cos A$, ……………………………………………………………………………2 分

所以 $\tan A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$、 ……………………………………………………………………………4 分

因为 $A\in(0,\pi)$,所以 $\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{6}$ ……………………………………………………………………………5 分

选①，由正弦定理可得，$\dfrac{2}{\frac{1}{2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin B}$,所以$\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，又因为$B\in(0,\pi)$，

所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$或$\dfrac{2\pi}{3}$， ……………………………………………………………………………7 分

当$A=\dfrac{\pi}{6}$，$B=\dfrac{\pi}{3}$时，$C=\dfrac{\pi}{2}$，当$A=\dfrac{\pi}{6}$，$B=\dfrac{2\pi}{3}$时，$C=\dfrac{\pi}{6}$， ……………………………8 分

满足条件的三角形有 2 个；……………………………………………………………………………10 分

选②由正弦定理可得

$\dfrac{2}{\frac{1}{2}}=\dfrac{4}{\sin\mathrm{B}}$,所以 $\sin\mathrm{B}=1$, 因为 $\mathrm{B}\in(0,\pi)$, 所以 $\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{2}$. ……………………………………………………8 分

此时 $C=\dfrac{\pi}{3}$ 满足条件的三角形有 1 个；……………………………………………………10 分

选③，由正弦定理可得，

$\dfrac{2}{\frac{1}{2}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{\sin\mathrm{B}}$,所以 $\sin\mathrm{B}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, 又因为 $\sin\mathrm{B}\le 1$, 所以 B 无解……………………………………………………8 分

满足条件的三角形有 0 个……………………………………………………………………………10 分

18.【解析】（1）数列$\{a_n\}$的公比为 q， $a_3=a_1q^2=32$，

解得 $q=2$， $q=-2$ （舍）， ……………………………………………………………………………1 分

所以 $a_n=2^{n-2}$， ……………………………………………………………………………2 分

$b_n=\log_2 a_n=n+2$， $b_1=3$， ……………………………………………………………………………3 分

当 $n\ge 2$ 时， $b_n-b_{n-1}=(n+2)-(n+1)=1$， ……………………………………………………………4 分

数列$\{b_n\}$是首项为 3，公差为 1 的等差数列，通项公式 $b_n=n+2$ ……………………………………5 分

(2) $c_n=\dfrac{2b_n}{a_n}=\dfrac{n+2}{2^{n+1}}$ ……………………………………………………………………………6 分

则$S_n=\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{n+1}{2^n}+\frac{n+2}{2^{n+1}}$,

$\frac{1}{2}S_n=\quad\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots+\frac{n+1}{2^{n+1}}+\frac{n+2}{2^{n+2}}$. 两式相减得……8 分

$\frac{1}{2}S_n=\frac{3}{4}+(\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}})-\frac{n+2}{2^{n+2}}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}(1-\frac{1}{2^{n-1}})-\frac{n+2}{2^{n+2}}$. ……10 分

所以$S_n=2-\frac{n+4}{2^{n+1}}$. ……12 分

19. 【解析】（1）由诱导公式 $\cos C=-\cos(A+B)$，化简可得 $\sqrt{3}\sin B-2\cos C=\sqrt{3}\sin B+2\cos A\cos B-2\sin A\sin B$ $\therefore\sqrt{3}\sin B=2\sin A\sin B$, ……3 分

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $\sin B>0$，所以 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$ ……5 分

（2）因为ΔABC为锐角三角形，所以$A=\frac{\pi}{3}$， ……6 分

直线MN的斜率为 2，所以$\frac{b-a}{2\sin B-2\sin A}=2$， ……7 分

由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

得$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b-a}{2\sin B-2\sin A}=2$, ……8 分

所以$b+c=4(\sin B+\sin C)=4\sin B+4\sin(\frac{2\pi}{3}-B)=6\sin B+2\sqrt{3}\cos B=4\sqrt{3}\sin(B+\frac{\pi}{6})$ ……10 分

又因为ΔABC为锐角三角形，点$M(\sqrt{3},a)$，点$N(2\sin B,b)$是不同的两点，所以 $B\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})\cup(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$ ……11 分

所以$b+c$的取值范围为$(6,4\sqrt{3})$ ……12 分

20.【解析】(1) $h(x)$的定义域为$(0,+\infty)$， ……1 分

$h(x)=x-\ln x+\frac{ax}{e^x}$，故$h'(x)=\frac{x-1}{x}+\frac{a(1-x)}{e^x}$， ……2 分

$h'(x)=(x-1)\left(\frac{1}{x}-\frac{a}{e^x}\right)=(x-1)\frac{(e^x-ax)}{xe^x}$

当$a\leqslant 0$时，$e^x-ax\geqslant 0$，当$x\in(0,1)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减；

当$x\in(1,+\infty)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增;……3 分

当$0<a\leqslant e$时，$e^x-ax\geqslant e^x-ex$，令$u(x)=e^x-ex$，$u'(x)=e^x-e$，

$x\in(0,1)$时，$u'(x)<0$，$u(x)$单调递减；

当$x\in(1,+\infty)$时，$u'(x)>0$，$u(x)$单调递增;所以$u(x)\geqslant e-e=0$，

当$x\in(0,1)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减；

当$x\in(1,+\infty)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增;……5 分

(不证明$e^x-ax\geqslant 0$扣 1 分，$a\leqslant e$合在一起证明也对)

综上：$a\leqslant e$时，当$x\in(0,1)$时，$h(x)$单调递减；当$x\in(1,+\infty)$时，$h(x)$单调递增……6 分

（2）$f'(x)=\frac{x-1}{x}$，则当$x\in(0,1)$时，$f'(x)<0$，当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$

故$f(x)$在$(0,1)$上为减函数，在$(1,+\infty)$上增函数，

故$f(x)_{\min}=f(1)=1$即$f(x)\geqslant 1$……8 分

$g'(x)=\frac{1-x}{e^x}$故$g(x)$在$(0,1)$上为增函数，在$(1,+\infty)$上减函数

故$g(x)_{\max}=g(1)=\frac{1}{e}$即$g(x)\leqslant\frac{1}{e}$……10 分

$g(x)+\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant\frac{1}{e}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{4}{4e}+\frac{1}{\sqrt{3}}<\frac{4}{10}+\frac{6}{6\sqrt{3}}<\frac{4}{10}+\frac{6}{10}=1$……11 分

所以方程$f(x)=g(x)+\frac{\sqrt{3}}{3}$无解……12 分

21.【解析】（1）证明：因为$\angle OAB=\angle OBA$,所以$OA=OB$.

因为$FB=FC,FO\perp$平面$ABCD$,所以$OB=OC$,所以$OA=OB=OC$,所以O为AC的中点.……2 分

连接AF,因为M为CF的中点，所以$OM\,//\,AF$.……3 分

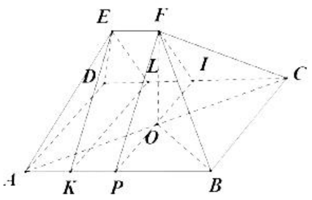
因为$OM\not\subset$平面$ABFE$,$AF\subset$平面$ABFE$,所以$OM\,//$平面$ABFE$.……4 分

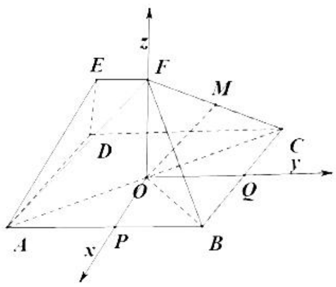
(2)解：过 O 作直线 PI 与直线 BC 平行，交 AB,DC 分别于 P,I，在 AP,DI 分别取点 K,L，$KP=IL=EF=1$，连接 FP,FI,EK,EL .乌甍 $ABCDEF$ 可以分割为三棱柱 $ELK-FPI$ 和四棱锥 $E-ADLK$ 、四棱锥 $F-BCIP$.

$V_{EF-ABCD}=\dfrac{1}{3}FO(1+2)\times 4+1\times\dfrac{1}{2}\times 4\times FO=6FO=12.\therefore FO=2.$ ....6 分

显然 P 为 AB 的中点，取 BC 的中点为 Q，连 OP,OQ，

则 $OP\perp AB,OQ\perp BC,\because AB\perp BC,\therefore OP\perp OQ.$ 建系如图..7 分





$B(2,2,0),C(-2,2,0),F(0,0,2),\overrightarrow{BC}=(-4,0,0),\overrightarrow{BF}=(-2,-2,2)$

设平面 BCF 的法向量为 $\overrightarrow{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}-4x=0\\ -2x-2y+2z=0\end{cases}$，令 $y=1$，得 $x=0,z=1.\overrightarrow{m}=(0,1,1).$ ....9 分

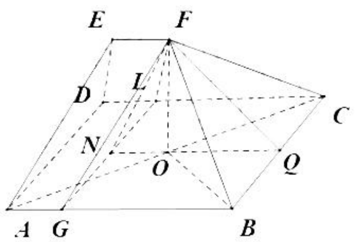
$E(0,-1,2),A(2,-2,0),D(-2,-2,0),\therefore\overrightarrow{AD}=(-4,0,0),\overrightarrow{AE}=(-2,1,2)$

设平面 ADE 的法向量为 $\overrightarrow{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}-4x=0\\ -2x+y+2z=0\end{cases}$，令 $z=1$，得 $x=0,y=-2.\overrightarrow{m}=(0,-2,1).$ ....10 分

$\cos\left\langle\overrightarrow{m},\overrightarrow{n}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{m}\right|\left|\overrightarrow{n}\right|}=\dfrac{-1}{\sqrt{5}\times\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}.$ ....11 分

所以所求二面角的正弦值为 $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}.$ ....12 分



法 2：取 $AG=DL=1$，因为 $EF//AB, EF=1$，所以 $EF\underset{=}{//}AG$．因为平行四边形 $AGEF$，$AE//GF$．同理可得

$DE//LF$，所以平面 $ADE//$ 平面 GLF ……………………………………………………7 分

设平面 $GLF\cap$ 平面 $BCF=l$，因为 $BC//GL$，所以 $BC//$ 平面 GLF，所以 $BC//l$．……………………8 分

取 GL 的中点为 N，BC 的中点为 Q，则 $FN\perp GL, FQ\perp BC$．$\therefore FN\perp l, FQ\perp l$．

所以二面角 $N-l-Q$ 的平面角为 $\angle NFQ$．……………………………………………………10 分

在 ΔNFQ 中，$NF=\sqrt{5}, NQ=3, FQ=2\sqrt{2}$．$\cos\angle NFQ=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$．……………………………………11 分

所以所求二面角的正弦值为 $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$． ……………………………………………………12 分

22.【解析】（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-\tan x-1$，

$f'(x)=e^x-\dfrac{1}{\cos^2 x}$ ……………………………………………………………………1 分

所以 $f(0)=0, f'(0)=0$ ……………………………………………………………………3 分

所以，曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=0$ ……………………………………………4 分

(2)①当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，不符合题意．……………………………5 分

②当 $a>0$ 时，$f'(x)=e^x-\dfrac{a}{\cos^2 x}=\dfrac{e^x\cos^2 x-a}{\cos^2 x}$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

令 $u(x)=e^x\cos^2 x-a$，则 $u'(x)=e^x\cos x(\cos x-2\sin x)=\sqrt{5}e^x\cos x\cos(x+\varphi)$，$0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}, \tan\varphi=2$

令 $x_0=\dfrac{\pi}{2}-\varphi$，$0<x_0<\dfrac{\pi}{2}$

(i)当 $-\dfrac{\pi}{2}<x<x_0$ 时，$u'(x)>0$，$u(x)$ 单调递增，

当 $x_0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$u'(x)<0$，$u(x)$ 单调递减．

由已知 $u(0)=1-a$ ，$f(0)=0$ ……………………………………………………………6 分

当 $a\ge 1$ 时，则有：当 $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ 时，$u(x)<u(0)\le 0$，

所以 $f'(x)<0$ 恒成立，故 $f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 上单调递减，

所以当 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 时，$f(x)>f(0)=0$，不存在零点……7 分

(ii)当 $0<a<1$ 时，$u(0)>0$.

又因为 $u\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-a<0$，所以 $\exists m\in(-\dfrac{\pi}{2},0)$，满足 $u(m)=0$，

所以当 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},m\right)$ 时，$u(x)<0$，则 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减.

当 $x\in(m,0)$ 时，$u(x)>0$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

又因为 $f(0)=0$，所以 $f(m)<0$. 当 $x\to-\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f(x)\to+\infty$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 上恰有一个零点……9 分

因为 $u(0)>0, u(\dfrac{\pi}{2})=-a<0$，$u(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 $\left(x_0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，

所以 $\exists n\in\left(x_0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，满足 $u(n)=0$.

所以当 $x\in(0,n)$ 时，$u(x)>0$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

当 $x\in(n,\dfrac{\pi}{2})$ 时，$u(x)<0$，则 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减.

又因为 $f(0)=0$，所以 $f(n)>0$.

又因为当 $x\to\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f(x)\to-\infty$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上恰有一个零点……11 分

综上所述：$0<a<1$……12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。