

## 2022 届高三开学摸底联考 全国卷 1 理科数学试卷

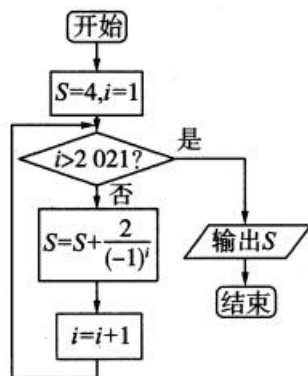
**注意事项:**

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为 120 分钟,满分 150 分

**一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。**

1. 设集合  $A = \{x | 0 < x < 2\}$ ,  $B = \{x | -2 < x < 2\}$ , 则  $\complement_B A =$   
 A.  $(-2, 0)$                       B.  $(-2, 0]$                       C.  $(-2, 2]$                       D.  $(0, 2)$
2. 已知  $z = 1 - i$ , 则  $\bar{z} \cdot (2 - i)$  的虚部为  
 A. 1                                  B.  $i$                                   C.  $-1$                                   D.  $-i$
3. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} + 1, & x < 0, \\ f(x-2), & x \geq 0, \end{cases}$  则  $f(2021) =$   
 A. 2                                  B.  $\frac{3}{2}$                                   C.  $\frac{1}{2}$                                   D. 3
4. 已知数列  $\{a_n\}$  是公差为零的等差数列,  $a_1 = 1, a_1, a_3, a_6$  成等比数列, 则  $a_5 =$   
 A.  $\frac{5}{4}$                                   B.  $\frac{7}{4}$                                   C. 2                                  D. 3
5. 已知实数  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x - y + 1 \geq 0, \\ x + y - 2 \leq 0, \\ y \geq 0, \end{cases}$  则  $z = x + 2y$  的最大值为  
 A.  $-1$                                   B. 2                                  C.  $\frac{7}{2}$                                   D.  $\frac{9}{2}$
6. 执行如图所示的程序框图, 输出的  $S$  的值为



- A.  $-4$                       B.  $-2$                       C. 2                      D. 4

7. 在  $\triangle ABC$  中,  $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD}$ ,  $P$  为  $BD$  上一点, 若  $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AC}$ , 则实数  $\lambda$  的值为

- A.  $\frac{1}{2}$                       B.  $\frac{2}{3}$                       C.  $\frac{3}{4}$                       D.  $\frac{3}{8}$

8. 四色定理(Four color theorem)又称四色猜想, 是世界近代三大数学难题之一. 它是于1852年由毕业于伦敦大学的格斯里(Francis Guthrie)提出来的, 其内容是“任何一张地图只用四种颜色就能使具有共同边界的国家着上不同的颜色.” 四色问题的证明进程缓慢, 直到1976年, 美国数学家运用电子计算机证明了四色定理. 现某校数学兴趣小组给一个底面边长互不相等的直四棱柱容器的侧面和下底面染色, 提出如下的“四色问题”: 要求相邻两个面不得使用同一种颜色, 现有4种颜色可供选择, 则不同的染色方案有

- A. 18种                      B. 36种                      C. 48种                      D. 72种

9. 将函数  $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$  的图象向左平移  $\varphi$  个单位后, 得到的函数图象关于  $y$  轴对称, 则  $\varphi$  的可能取值为

- A.  $\frac{\pi}{3}$                       B.  $\frac{\pi}{6}$                       C.  $\frac{2\pi}{3}$                       D.  $\frac{\pi}{2}$

10. 已知实数  $x, y$  满足  $\ln x < \ln y$ , 则下列结论正确的是

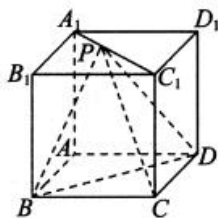
- A.  $\tan x < \tan y$                       B.  $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^y$   
C.  $\frac{1+y}{x^2} < \frac{1+x}{y^2}$                       D.  $y^2 + \frac{4}{x(y-x)} \geq 8$

11. 已知点  $F$  为抛物线  $C: y^2 = 4x$  的焦点, 过点  $F$  的直线  $l$  交抛物线  $C$  于  $A, B$  两点, 若  $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{FB}$ , 则  $|AB| =$

- A. 9                      B.  $4\sqrt{2}$                       C.  $2\sqrt{2}$                       D.  $\frac{9}{2}$

12. 如图, 在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 点  $P$  为线段  $A_1C_1$  上的动点(点  $P$  与  $A_1, C_1$  不重合), 则下列说法不正确的是

- A.  $BD \perp CP$   
B. 三棱锥  $C - BPD$  的体积为定值  
C. 过  $P, C, D_1$  三点作正方体的截面, 截面图形为三角形或梯形  
D.  $DP$  与平面  $A_1B_1C_1D_1$  所成角的正弦值最大为  $\frac{1}{3}$



**二、填空题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分。**

13. 曲线  $f(x) = \ln x + 2x$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程为\_\_\_\_\_.

14. 写出一个与椭圆  $C: \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$  有公共焦点的椭圆方程\_\_\_\_\_.

15. 在  $(x^2 - 2x + 1)(x + 1)^4$  的展开式中,  $x^5$  的系数为\_\_\_\_\_ (用数字作答).

16. 已知函数  $f(x)$  是定义域在  $\mathbf{R}$  上的偶函数, 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), & 0 \leq x \leq 1, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1, & x > 1, \end{cases}$  若

关于  $x$  的方程  $(f(x))^2 - (a+1)f(x) + a = 0$  有且仅有6个不同实数根, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

三、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答。

(一)必考题:60 分。

17.(12 分)

已知在  $\triangle ABC$  中,角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ,且满足  $\sqrt{3} \cos B - 1 = \sin(A+C)$ ,  $b=4$ .

(1)求  $\sin B$ ;

(2)若  $C-A = \frac{\pi}{2}$ ,求  $\triangle ABC$  的面积.

18.(12 分)

电视传媒公司为了了解某地区观众对“中国诗词大会”的收视情况,随机抽取了 100 名观众进行调查,其中女性有 55 名.将日均收看该节目时间不低于 40 分钟的观众称为“诗词迷”,已知“诗词迷”中有 15 名男性,“非诗词迷”共有 75 名.

(1)根据已知条件完成下面的  $2 \times 2$  列联表,并据此资料判断是否有 95% 的把握认为是否为“诗词迷”与性别有关?

	非诗词迷	诗词迷	合计
男			
女			
合计			

(2)采用分层抽样的方式从“诗词迷”中任意选取 5 人进行问卷调查,若再从这 5 人中任意选取 2 人奖励诗词大礼包,用  $x$  表示获得大礼包的男性人数, $y$  表示获得大礼包的女性人数,设  $\xi = |x - y|$ ,求  $\xi$  的分布列及期望.

附:  $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(a+c)(c+d)(b+d)}$ ,其中  $n = a + b + c + d$ .

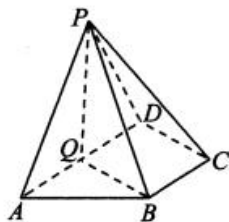
$P(K^2 > k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
$k_0$	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19.(12 分)

如图,在底面为梯形的四棱锥  $P-ABCD$  中, $AD \parallel BC$ , $PA = PD = AD = DC = 2BC = 2$ , $CD \perp$  平面  $PAD$ , $Q$  为  $AD$  的中点.

(1)证明: $AD \perp$  平面  $PBQ$ ;

(2)求直线  $PC$  与平面  $PAB$  所成角的正弦值.





已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ , 且该双曲线经过点  $P(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ .

- (1) 求双曲线  $C$  的方程;
- (2) 设斜率分别为  $k_1, k_2$  的两条直线  $l_1, l_2$  均经过点  $Q(2, 1)$ , 且直线  $l_1, l_2$  与双曲线  $C$  分别交于  $A, B$  两点 ( $A, B$  异于点  $Q$ ), 若  $k_1 + k_2 = 1$ , 试判断直线  $AB$  是否经过定点, 若存在定点, 求出该定点坐标; 若不存在, 说明理由.

21. (12分)

已知函数  $f(x) = m e^x - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} - 1$ .

- (1) 当  $m = 0$  时, 求  $f(x)$  的单调区间;
- (2) 若对任意的  $x \in (0, +\infty)$ , 均有  $f(x) \geq 0$ , 求实数  $m$  的最小值.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在平面直角坐标系  $xOy$  中, 直线  $C_1$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 1 - \sqrt{2}t, \\ y = \sqrt{2}t \end{cases}$  ( $t$  为参数). 以坐标原点  $O$  为

极点,  $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线  $C_2$  的极坐标方程为  $\rho = 2\cos\theta$ .

- (1) 求直线  $C_1$  的普通方程和曲线  $C_2$  的直角坐标方程;
- (2) 设  $P(0, 1)$ , 曲线  $C_1$  与  $C_2$  交于  $A, B$  两点, 求  $||PA| - |PB||$ .

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

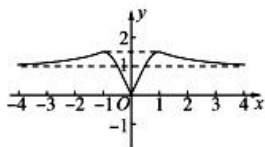
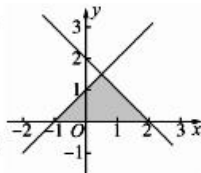
已知函数  $f(x) = |x+1| + |x-3|$ .

- (1) 求不等式  $f(x) \geq 6$  的解集;
- (2) 设函数  $f(x)$  的最小值为  $t$ , 已知  $a^2 + b^2 + c^2 = t$ , 求  $a + 2b + 3c$  的最大值.

2022 届高三开学摸底联考 全国卷 1

理科数学参考答案及评分意见

- 1.B 【解析】画数轴可得  $\complement_{\mathbb{R}}A = (-2, 0]$ , 故选 B.
- 2.A 【解析】 $\bar{z} \cdot (2-i) = (1+i) \cdot (2-i) = 3+i$ , 所以  $\bar{z} \cdot (2-i)$  的虚部为 1, 故选 A.
- 3.D 【解析】由题意  $f(2021) = f(2019) = \dots = f(1) = f(-1) = 3$ , 故选 D.
- 4.C 【解析】由  $a_1, a_3, a_5$  成等比数列得  $a_3^2 = a_1 \cdot a_5$ , 即  $(1+2d)^2 = 1+5d$ , 已知  $d \neq 0$ , 解得  $d = \frac{1}{3}$ , 则  $a_4 = 2$ , 故选 C.
- 5.C 【解析】如图, 作出不等式组对应的平面区域. 由  $z = x + 2y$  可得  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{z}{2}$ , 则一系列斜率为  $-\frac{1}{2}$  的直线, 易知当直线经过点  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$  时,  $z$  最大, 最大值为  $\frac{7}{2}$ , 故选 C.
- 6.C 【解析】程序运行时, 变量  $S, i$  的值依次为:  $S = 1, i = 1; S = 2, i = 2; S = 4, i = 3; S = 2, i = 4; \dots$ ,  $i$  是奇数时,  $S = 4, i$  是偶数时,  $S = 2$ , 输出时:  $2; 4; 2; S = 2$ , 故选 C.
- 7.D 【解析】由题知  $B, P, D$  三点共线, 所以  $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + 2\lambda\overrightarrow{AD}$ , 所以  $2\lambda + \frac{1}{4} = 1$ , 所以  $\lambda = \frac{3}{8}$ , 故选 D.
- 8.D 【解析】不同的菜色方案有  $4 \times 3 \times 2 \times (2+1) = 72$  种, 故选 D.
- 9.A 【解析】将函数  $y = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$  的图象向左平移  $\varphi$  个单位后, 得到函数  $y = \cos[2(x+\varphi) + \frac{\pi}{3}] = \cos(2x + 2\varphi + \frac{\pi}{3})$ , 因为图象关于  $y$  轴对称, 所以  $2\varphi + \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , 则  $\varphi = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$ , 故选 A.
- 10.D 【解析】由题  $\ln x < \ln y$  可得  $0 < x < y < \pi$ , 未然比较, 故 A 错误; B, 不成立, 故 B 错误; C, 取  $x = 1, y = 2, \frac{1+x}{y^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} < \frac{1+y}{x^2} = \frac{1+2}{1} = 3$ , 故 C 错误; D, 因为  $\ln x < \ln y < \frac{\pi}{2}$ , 所以  $\frac{y-x}{2} < \frac{\pi}{4}$ , 所以  $y^2 + \frac{4}{x(y-x)} \geq y^2 + \frac{16}{y^2} \geq 8$ , 故 D 正确, 故选 D.
- 11.D 【解析】因为焦点  $F(1, 0)$ , 设直线  $l$  的方程为  $x = \lambda y + 1$ , 代入抛物线方程, 得  $y^2 - 4\lambda y - 4 = 0$ , 设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 由韦达定理得  $y_1 y_2 = -4$ . 因为  $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{FB}$ , 所以  $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{FB}$ , 所以  $y_1 = -2y_2$ , 解得  $y_1 = -2\sqrt{2}, y_2 = \sqrt{2}$  或  $y_1 = 2\sqrt{2}, y_2 = -\sqrt{2}$ , 所以  $x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}$ , 所以  $|AB| = x_1 + x_2 + p = \frac{1}{2} + 2 + 2 = \frac{9}{2}$ , 故选 D.
- 12.D 【解析】由题可知  $BD \perp$  平面  $ACC_1A_1$ , 所以  $BD \perp CP$ , 故 A 正确; 由等体积法得  $V_{C-BPD} = V_{P-BCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle BCD} \cdot AA_1$  为定值, 故 B 正确; 根据截面知识可知 C 正确; 选项 D, 在正方体中, 连接  $D_1P$ , 则  $D_1P$  为  $DP$  在平面  $A_1B_1C_1D_1$  上的射影, 则  $\angle D_1PD$  为  $DP$  与平面  $A_1B_1C_1D_1$  所成的角, 设正方体的棱长为 1,  $PD_1 = x$ , 则  $DP = \sqrt{1+x^2}, \sin \angle D_1PD = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ , 当  $x$  取得最小值时,  $\sin \angle D_1PD$  的值最大, 即  $D_1P \perp A_1C_1$  时,  $x$  的值最小为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 所以  $\sin \angle D_1PD$  的值最大为  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ , 故选项 D 不正确, 故选 D.
13.  $3x - y - 1 = 0$  【解析】 $f(1) = 2, f'(x) = \frac{1}{x} + 2, f'(1) = 3$ , 所以曲线在点  $(1, f(1))$  处的切线方程为  $y - 2 = 3(x - 1)$ , 化简得  $3x - y - 1 = 0$ .
14.  $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{8} = 1$  (答案不唯一) 【解析】由题可知椭圆形式应为  $\frac{x^2}{3+m} + \frac{y^2}{m} = 1 (m > -3, \text{且 } m \neq 0)$ .
- 15.2 【解析】 $(x+1)^4$  的二项展开式  $T_{r+1} = C_4^r x^r$ , 则  $x^2$  的系数是  $C_4^2 = 2C_4^1 = 2$ .
16.  $(1, \frac{3}{2})$  【解析】画出函数  $y = f(x)$  的图象, 如图所示.



由  $(f(x))^2 - (a+1)f(x) + a = 0$ , 可得  $f(x) = 1$  或  $f(x) = a$ , 因为由图象知当  $f(x) = 1$  时, 方程有 2 个根, 又关于  $x$  的方程



$(f(x))^2 - (a+1)f(x) + a = 0$  有且仅有 6 个不同实数根, 所以  $f(x) = a$  有 4 个根, 由图知, 当  $1 < a < \frac{3}{2}$  时, 方程  $f(x) = a$  有 4 个根.

17.【解析】(1) 在  $\triangle ABC$  中,  $A+B+C=\pi$ , 即  $B=\pi-(A+C)$ ,

所以  $\sin B = \sin(A+C)$ ,

由题意得  $\sqrt{3} \cos B = \sin B + 1$ .

两边平方可得  $3\cos^2 B = \sin^2 B + 2\sin B + 1$ ,

根据  $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$ ,

可整理为  $2\sin^2 B + \sin B - 1 = 0$ ,

解得  $\sin B = \frac{1}{2}$  或  $\sin B = -1$  (舍去),

所以  $\sin B = \frac{1}{2}$ . ..... 6 分

(2) 由 (1) 可知  $B = \frac{\pi}{6}$  或  $\frac{5\pi}{6}$ . 由  $C = \pi - A - \frac{\pi}{2}$ , 可知  $C$  为钝角, 所以  $B = \frac{\pi}{6}$ ,

又由  $A+B+C=\pi$ , 解得  $A = \frac{\pi}{6}, C = \frac{2}{3}\pi$ ,

所以  $a=b=4$ ,

所以  $\triangle ABC$  的面积为  $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \sin C = 4\sqrt{3}$ ,

综上所述,  $\triangle ABC$  的面积为  $4\sqrt{3}$ . ..... 12 分

18.【解析】(1) 在抽取的 100 人中, “非诗词迷”共有 75 名, 则“诗词迷”有 25 名, 又女性有 55 名, 从而完成  $2 \times 2$  列联表如下所示.

	非诗词迷	诗词迷	合计
男	30	15	45
女	45	10	55
合计	75	25	100

将  $2 \times 2$  列联表中的数据代入公式计算, 得  $K^2 = \frac{100 \times (30 \times 10 - 45 \times 15)^2}{75 \times 25 \times 45 \times 55} \approx 3.030 > 3.841$ .

所以没有 95% 的把握认为是否为“诗词迷”与性别有关. .... 5 分

(2) 由题意采用分层抽样的方式从“诗词迷”中任意选取 5 人, 则男性 3 名, 女性 2 名, 再抽取 2 人,

当  $x=2$  时,  $y=0$ , 当  $x=1$ ,  $y=1$ , 当  $x=0$ ,  $y=2$ .

所以  $\xi$  的所有取值为 0, 2,

所以  $P(\xi=0) = \frac{C_3^2 C_2^0}{C_5^2} = \frac{3}{5}, P(\xi=2) = \frac{C_3^0 C_2^2 + C_3^1 C_2^1}{C_5^2} = \frac{2}{5}$ ,

所求分布列为

$\xi$	0	2
$P$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

所以  $E(\xi) = 0 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$ . ..... 12 分

19.【解析】(1) 证明: 因为  $\triangle PAD$  为正三角形,  $Q$  为  $AD$  的中点, 所以  $PQ \perp AD$ .

又  $AD \parallel BC, AD = DC = BC$ ,

所以四边形  $BCDQ$  为平行四边形, 所以  $BQ \parallel CD$ .

因为  $CD \perp$  平面  $PAD$ , 所以  $CD \perp AD$ ,

所以  $BQ \perp AD$ .

又  $PQ \cap BQ = Q$ ,

所以  $AD \perp$  平面  $PBQ$ . ..... 12 分

(2) 因为  $PQ \perp AD, PQ \perp CD$ ,

所以  $PQ \perp$  平面  $ABCD$ ,

所以  $QA, QB, QP$  两两垂直,

由题得  $PQ = \sqrt{3}$ .

分别以直线  $QA, QB, QP$  为  $x$  轴,  $y$  轴,  $z$  轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,

则  $Q(0,0,0), A(1,0,0), B(0,2,0), C(-1,2,0), P(0,0,\sqrt{3})$ ,

$\vec{PC} = (-1, 2, -\sqrt{3}), \vec{AP} = (-1, 0, \sqrt{3}), \vec{AB} = (-1, 2, 0)$ ,

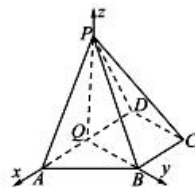
设  $m = (x, y, z)$  为平面  $PAB$  的一个法向量,

$$\text{由 } \begin{cases} m \cdot \vec{AP} = 0, \\ m \cdot \vec{AB} = 0, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} -x + \sqrt{3}z = 0, \\ -x + 2y = 0, \end{cases} \text{ 取 } z = 1, \text{ 则 } m = \left( \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right)$$

设直线  $PC$  与平面  $PAB$  所成的角为  $\theta$ ,

$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle m, \vec{PC} \rangle| = \frac{|\vec{PC} \cdot m|}{|\vec{PC}| |m|} = \frac{|-\sqrt{3}|}{\sqrt{8} \times \sqrt{\frac{19}{4}}} = \frac{\sqrt{114}}{38}$$

所以直线  $PC$  与平面  $PAB$  所成角的正弦值为  $\frac{\sqrt{114}}{38}$ . ..... 12 分



20.【解析】(1) 离心率为  $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ , 则  $c^2 = 3b^2, a^2 = 2b^2$ , 即双曲线为  $\frac{x^2}{2b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,

又点  $P\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  在双曲线  $C$  上, 所以  $\frac{3}{2b^2} - \frac{1}{b^2} = 1$ ,

解得  $b^2 = 1, a^2 = 2$ ,

所以双曲线  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ . ..... 4 分

(2) 当直线  $AB$  的斜率不存在时, 点  $A, B$  关于  $x$  轴对称,

设  $A(x_0, y_0), B(x_0, -y_0)$ ,

则由  $k_1 + k_2 = 1$ , 解得  $\frac{y_0 - 1}{x_0 - 2} + \frac{-y_0 - 1}{x_0 - 2} = 1$ ,

即  $\frac{-2}{x_0 - 2} = 1$ , 解得  $x_0 = 0$ , 不符合题意, 所以直线  $AB$  的斜率存在.

不妨设直线  $AB$  的方程为  $y = kx + t$ , 代入  $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ ,

整理得  $(2k^2 - 1)x^2 + 4ktx + 2t^2 + 2 = 0 (2k^2 - 1 \neq 0), \Delta > 0$ ,

设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 则  $x_1 + x_2 = -\frac{4kt}{2k^2 - 1}, x_1 x_2 = \frac{2t^2 + 2}{2k^2 - 1}$ ,

由  $k_1 + k_2 = 1$ , 得  $\frac{y_1 - 1}{x_1 - 2} + \frac{y_2 - 1}{x_2 - 2} = 1$ , 即  $\frac{kx_1 + t - 1}{x_1 - 2} + \frac{kx_2 + t - 1}{x_2 - 2} = 1$ ,

整理得  $(2k - 1)x_1 x_2 + (t - 2k + 1)(x_1 + x_2) - 4t = 0$ ,

所以  $(2k - 1) \cdot \frac{2t^2 + 2}{2k^2 - 1} + (t - 2k + 1) \cdot \left(-\frac{4kt}{2k^2 - 1}\right) - 4t = 0$ ,

整理得  $t^2 + (2k - 2)t - 1 + 2k = 0$ , 即  $(t - 1)(t - 2k + 1) = 0$ ,

所以  $t = 1$  或  $t = 1 - 2k$ .

当  $t = 1$  时, 直线  $AB$  的方程为  $y = kx + 1$ , 经过定点  $(0, 1)$ ;

当  $t = 1 - 2k$  时, 直线  $AB$  的方程为  $y = k(x - 2) + 1$ , 经过定点  $Q(2, 1)$ , 不符合题意.

综上, 直线  $AB$  过定点  $(0, 1)$ . ..... 12 分

21.【解析】(1)  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ,

当  $m = 0$  时,  $f(x) = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} - 1$ , 则  $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ ,

当  $x \in (0, 1)$  时,  $f'(x) < 0, f(x)$  单调递减,



当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增,  
所以  $f(x)$  的减区间为  $(0, 1)$ , 增区间为  $(1, +\infty)$ . ..... 5 分

(2) 因为对任意的  $x \in (0, +\infty)$ ,  $f(x) \geq 0$  恒成立, 即  $m \geq \frac{x + \ln x + 1}{x e^x}$  恒成立.

令  $g(x) = \frac{x + \ln x + 1}{x e^x}$ , 则  $g'(x) = \frac{-(x+1)(x + \ln x)}{x^2 e^x}$ ,

令  $h(x) = x + \ln x$ , 则  $h(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增,

因为  $h\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} - 1 < 0, h(1) = 1 > 0$ ,

所以存在  $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ , 使得  $h(x_0) = x_0 + \ln x_0 = 0$ ,

当  $x \in (0, x_0)$  时,  $h(x) < 0, g'(x) > 0, g(x)$  单调递增;

当  $x \in (x_0, +\infty)$  时,  $h(x) > 0, g'(x) < 0, g(x)$  单调递减.

由  $x_0 + \ln x_0 = 0$ , 可得  $x_0 = -\ln x_0$ , 则  $e^{x_0} = e^{-\ln x_0} = \frac{1}{x_0}$ .

所以  $g(x_0) = \frac{x_0 + \ln x_0 + 1}{x_0 e^{x_0}} = 1$ , 又  $m \geq \frac{x + \ln x + 1}{x e^x}$  恒成立,

所以  $m \geq 1$ , 故  $m$  的最小值为 1. .... 12 分

22.【解析】(1) 直线  $C_1$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 1 - \sqrt{2}t, \\ y = \sqrt{2}t \end{cases}$  ( $t$  为参数),

消去参数  $t$  得普通方程为  $x + y - 1 = 0$ .

曲线  $C_2$  的极坐标方程为  $\rho = 2 \cos \theta$ , 两边同乘以  $\rho$ ,

得  $\rho^2 = 2\rho \cos \theta$ , 所以直角坐标方程为  $x^2 + y^2 - 2x = 0$ . .... 5 分

(2) 直线  $C$  过点  $P(0, 1)$ , 则其参数方程为  $\begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t, \end{cases}$

将其代入方程  $x^2 + y^2 - 2x = 0$ , 得  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2 + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2 - 2 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) = 0$ .

化简得  $t^2 + 2\sqrt{2}t + 1 = 0, \Delta = (2\sqrt{2})^2 - 4 = 4 > 0$ ,

设  $A, B$  对应的参数分别为  $t_1, t_2$ , 所以  $t_1 + t_2 = -2\sqrt{2}, t_1 t_2 = 1$ ,

所以  $||PA| - |PB|| = |t_1 - t_2| = \sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2} = \sqrt{(-2\sqrt{2})^2 - 4 \times 1} = 2$ . .... 10 分

23.【解析】(1) 由已知不等式  $|x + 1| + |x - 3| \geq 6$ ,

当  $x \geq 3$  时, 不等式为  $x + 1 + x - 3 \geq 6$ , 解得  $x \geq 4$ ;

当  $-1 < x < 3$  时, 不等式为  $x + 1 + 3 - x \geq 6$ , 无解;

当  $x \leq -1$  时, 不等式为  $-x - 1 + 3 - x \geq 6$ , 解得  $x \leq -2$ .

综上, 原不等式的解集为  $(-\infty, -2] \cup [4, +\infty)$ . .... 5 分

(2) 因为  $f(x) = |x + 1| + |x - 3| \geq |x + 1 - x + 3| = 4$ .

所以  $a^2 + b^2 + c^2 = 4$ ,

又  $(a^2 + b^2 + c^2)(1^2 + 2^2 + 3^2) \geq (a + 2b + 3c)^2$ .

则  $(a + 2b + 3c)^2 \leq 4 \times (1 + 2^2 + 3^2) = 56$ , 所以  $a + 2b + 3c \leq 2\sqrt{14}$ .

当且仅当  $a = \frac{\sqrt{14}}{7}, b = \frac{2\sqrt{14}}{7}, c = \frac{3\sqrt{14}}{7}$  时,  $a + 2b + 3c$  的最大值为  $2\sqrt{14}$ . .... 10 分



## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

