2023届新高三开学联考

数学试题

本试卷共4页,22题。全卷满分150分。考试用时120分钟。

注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、考号等填写在试题卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 填空题和解答题的作答:用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后,请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、单选题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知复数 z 满足 $z(1+i)=2$,则 $\bar{z}$ 的虚部为

A. 1　　B. -1　　C. i　　D. $-$i

2. 集合 $A=\{x|x^2-x-2<0\}$,$B=\{y|y=x^2,x\in A\}$,则 $A\cap B=$

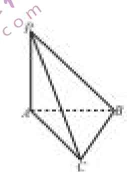
A. $(1,4)$　　B. $[1,4)$　　C. $(0,2)$　　D. $[0,2)$

3. 在平行四边形 $ABCD$ 中,点 E,F 分别满足 $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EC}$,$\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{FD}$,若 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,则 $\overrightarrow{EF}=$

A. $\frac{5}{12}\boldsymbol{a}-\frac{3}{4}\boldsymbol{b}$　　B. $\frac{11}{12}\boldsymbol{a}-\frac{5}{4}\boldsymbol{b}$

C. $\frac{13}{12}\boldsymbol{a}-\frac{3}{4}\boldsymbol{b}$　　D. $\frac{19}{12}\boldsymbol{a}-\frac{5}{4}\boldsymbol{b}$

4. 如图所示的三棱锥 $P-ABC$ 中,$PA\perp$面 ABC,$AB\perp BC$,$PA=AB=BC=3$,则该三棱锥的外接球的表面积为



A. $\frac{27\pi}{2}$　　B. 27π　　C. 54π　　D. 108π

5. 把函数 $y=\sin 2x(x\in\mathbf{R})$ 的图象上所有的点向左平行移动 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,再把所得图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍(纵坐标不变),得到的图象所表示的函数是

A. $y=\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right),x\in\mathbf{R}$

B. $y=\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right),x\in\mathbf{R}$

C. $y=\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right),x\in\mathbf{R}$

D. $y=\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right),x\in\mathbf{R}$

6. 在 0 至 5 这 6 个数字中任选 3 个不同的数，组成一个三位数. 若从这些三位数中任取一个，则该数为三位偶数的概率是

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{13}{25}$　　C. $\frac{14}{25}$　　D. $\frac{3}{5}$

7. 已知 $f(x)=2x^2$，数列$\{a_n\}$满足 $a_1=2$，且对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $a_{n+1}=f(a_n)$，则

A. $\{a_n\}$是等差数列　　B. $\{a_n\}$是等比数列

C. $\{\log_2 a_n\}$是等比数列　　D. $\{\log_2 a_n+1\}$是等比数列

8. 设 $a=\frac{1}{2\sqrt{e}}$，$b=\ln\sqrt{2}$，$c=\frac{4-\ln 4}{e^2}$，则

A. $a<b<c$　　B. $c<b<a$　　C. $a<c<b$　　D. $b<c<a$

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知 $f(x)=xe^x$，$x\in\mathbf{R}$，则

A. $f'(x)=(x-1)e^x$　　B. 曲线 $f(x)$在$(0,0)$处的切线斜率为 1

C. $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增　　D. $f(x)$的最小值为$-\frac{1}{e}$

10. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$，$F_1$、$F_2$ 是椭圆 C 的两个焦点，M、N 是椭圆 C 上两点，且 M、N 分别在 x 轴两侧，则

A. 若直线 MN 经过原点，则四边形 MF_1NF_2 为矩形

B. 四边形 MF_1NF_2 的周长为 20

C. $\triangle MF_1F_2$ 的面积的最大值为 12

D. 若直线 MN 经过 F_2，则 F_1 到直线 MN 的最大距离为 8

11. 直六棱柱 $ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 中，底面是边长为 2 的正六边形，侧棱 $AA_1=2$，点 O 是底面 $ABCDEF$ 的中心，则

A. OF_1 // 平面 A_1CD_1

B. OF_1 与 BC 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{2}}{4}$

C. $BO\perp$平面 AA_1D_1D

D. B_1F 与平面 CC_1F_1F 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{4}$

12. 已知直线 $l:y=ax-1$，曲线 $C_1:f(x)=e^{x+1}+1$，曲线 C_1 关于直线 $y=x+1$ 对称的曲线 C_2 所对应的函数为 $y=g(x)$，则以下说法正确的是

A. 不论 a 为何值，直线 l 恒过定点$(0,-1)$

B. $g(x)=\ln x-1$

C. 若直线 l 与曲线 C_2 相切，则 $a=1$

D. 若直线 l 上有两个关于直线 $y=x+1$ 对称的点在曲线 C_1 上，则 $0<a<1$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\left(x-\frac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中的常数项为________.

14. 过点 $P(2,2)$作圆 $x^2+y^2=4$ 的两条切线，切点分别为 A、B，则直线 AB 的方程为________.

15. “中国剩余定理”又称“孙子定理”，最早可见于中国南北朝时期的数学著作《孙子算经》卷下第二十六题，叫做“物不知数”，原文如下：今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？现有这样一个相关的问题：被 3 除余 2 且被 5 除余 3 的正整数按照从小到大的顺序排成一列，构成数列$\{a_n\}$，记数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，则$\frac{S_n+120}{n}$的最小值为________.

16. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$，$F_1$、$F_2$ 是双曲线 C 的左、右焦点，M 是双曲线 C 右支上一点，l 是$\angle F_1MF_2$ 的平分线，过 F_2 作 l 的垂线，垂足为 P，则点 P 的轨迹方程为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤．

17.（本小题满分 10 分）

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，且 $S_{n+1}=4a_n+1$，$b_n=\frac{a_n}{2^n}(n\in\mathbf{N}^*)$．

（1）证明：数列$\{b_n\}$是等差数列；

（2）求数列$\{a_n\}$的前 n 项和．

18.（本小题满分 12 分）

已知锐角$\triangle ABC$中，角 A、B、C 所对边为 a、b、c，且$\frac{\tan B+\tan C+\sqrt{3}}{\tan B\tan C}=\sqrt{3}$．

（1）求角 A；

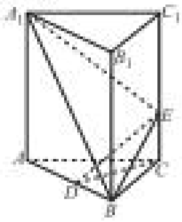
（2）若 $a=4$，求 $b+c$ 的取值范围．

19.（本小题满分 12 分）

如图所示，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面$\triangle ABC$是边长为 2 的等边三角形，$AA_1=4$，D 是 AB 的中点，E 是 CC_1 上一点．

（1）求证：平面 $CDE\perp$平面 AA_1B_1B；

（2）若 $CD\parallel$平面 A_1BE，求平面 A_1BE 与平面 ABC 所成的锐二面角的余弦值．



20.（本小题满分 12 分）

甲、乙两人进行下象棋比赛（没有平局）．采用“五局三胜”制．已知在每局比赛中，甲获胜的概率为 p，$0<p<1$．

(1)设甲以 3∶1 获胜的概率为 $f(p)$，求 $f(p)$ 的最大值；

(2)记(1)中，$f(p)$ 取得最大值时 p 的值为 p_0，以 p_0 作为 p 的值，用 X 表示甲、乙两人比赛的局数，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$．

21.（本小题满分 12 分）

已知抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 的准线上一点 $E(-1,t)$，直线 l 过抛物线 C 的焦点 F，且与抛物线 C 交于不同的两点 A，B．

(1)求抛物线 C 的方程；

(2)设直线 EA，EF，EB 的斜率分别为 k_1，k_2，k_3，求证：$k_1+k_3=2k_2$．

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{k}{x+1}$，$x>0$．

(1)当 $k=4$ 时，比较 $f(x)$ 与 2 的大小；

(2)求证：$\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{7}+\cdots+\dfrac{2}{2n+1}<\ln(n+1)$，$n\in \mathbf{N}^*$．

2023届新高三开学联考

数学参考答案及评分细则

一、单选题

1. A 【解析】由 $z(1+i)=2$，得 $z=\frac{2}{1+i}=\frac{2(1-i)}{1^2-i^2}=1-i$，从而 $\bar{z}=1+i$，所以 $\bar{z}$ 的虚部为1. 故选A.

2. D 【解析】因为 $A=\{x|-1<x<2\}$，$B=\{y|0\leqslant y<4\}$，所以 $A\cap B=\{x|0\leqslant x<2\}$. 故选D.

3. A 【解析】$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF})-(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE})=\left[\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\right]-\left(\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{a}\right)=\frac{5}{12}\boldsymbol{a}-\frac{3}{4}\boldsymbol{b}$.
故选A.

4. B 【解析】将三棱锥补形成正方体，易知该三棱锥的外接球即为正方体的外接球，所以外接球的半径 R 满足 $(2R)^2=PA^2+AB^2+BC^2=27$，即 $R^2=\frac{27}{4}$，所以外接球的表面积为 $S=4\pi R^2=27\pi$. 故选B.

5. C 【解析】把函数 $y=\sin 2x(x\in\mathbf{R})$ 的图象上所有的点向左平行移动 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，所得图象所表示的函数是 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)(x\in\mathbf{R})$，再把 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)(x\in\mathbf{R})$ 图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍(纵坐标不变)，得到的图象所表示的函数是 $y=\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)(x\in\mathbf{R})$. 故选C.

6. B 【解析】在0至5这6个数字中任选3个不同的数，共可组成 $n=A_5^3+A_5^2\times2=100$ 个三位数，其中共有 $m=A_5^2+(A_4^2+A_4^1)\times2=52$ 个偶数，由古典概型概率计算公式有 $p=\frac{m}{n}=\frac{52}{100}=\frac{13}{25}$. 故选B.

7. D 【解析】方法1：由题意知 $a_{n+1}=2a_n^2$，所以 $\log_2 a_{n+1}=1+2\log_2 a_n$，所以 $\log_2 a_{n+1}+1=2(\log_2 a_n+1)$，$n\in\mathbf{N}^*$，所以 $\{\log_2 a_n+1\}$ 是等比数列，故选D；方法2：因为 $a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n^2$，所以 $a_2=2^3$，$a_3=2^7$，$a_4=2^{15}$，$a_5=2^{31}$，猜想 $a_n=2^{2^n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，所以 $\log_2 a_n+1=2^n$，所以 $\{\log_2 a_n+1\}$ 是等比数列. 故选D.

8. A 【解析】设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，因为 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，令 $f'(x)>0$，得 $0<x<e$；令 $f'(x)<0$，得 $x>e$. 所以 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，而 $a=\frac{1}{2\sqrt{e}}=f(\sqrt{e})$，$b=\ln 2^{\frac{1}{2}}=\frac{\ln 2}{2}=f(2)=\frac{\ln 4}{4}=f(4)$，$c=\frac{4-\ln 4}{e^2}=\frac{2-\ln 2}{\frac{e^2}{2}}=\frac{\ln\frac{e^2}{2}}{\frac{e^2}{2}}=f\left(\frac{e^2}{2}\right)$，因为 $0<\sqrt{e}<2<e<\frac{e^2}{2}<4$，所以 $a<b<c$. 故选A.

二、多选题

9. BCD 【解析】选项A：因为 $f(x)=xe^x$，所以 $f'(x)=(x+1)e^x$，故不正确；选项B：曲线 $f(x)$ 在 $(0,0)$ 处的切线斜率为 $f'(0)=1\times e^0=1$，故正确；选项C：令 $f'(x)=(x+1)e^x>0$，解得 $x>-1$，所以 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-1,+\infty)$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故正确；选项D：因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 有最小值 $f(-1)=-\frac{1}{e}$，故正确. 故选BCD.

10. BC 【解析】选项A：若直线 MN 经过原点，易知四边形 MF_1NF_2 为平行四边形，因为 $|MN|$ 不一定与

$|F_1F_2|$相等，所以 MF_1NF_2 不一定是矩形，故不正确；选项B：四边形 MF_1NF_2 的周长为 $4a=20$，故正确；选项C：$\triangle MF_1F_2$ 的面积的最大值为 $\frac{1}{2}\times2c\times b=3\times4=12$，故正确；选项D：若直线 MN 经过 F_2，则 F_1 到直线 MN 的最大距离为 $|F_1F_2|=2c=6$，故不正确．故选BC．

11. ABD 【解析】选项A：记 $A_1D_1\cap C_1F_1=O_1$，连结 CO_1，易得 $OF_1\parallel CO_1$，从而 $OF_1\parallel$平面 A_1CD_1，故正确；选项B：因为 $OF_1\parallel CO_1$，所以 OF_1 与 BC 所成角即为 $\angle BCO_1$（或其补角），易得 $CO_1=2\sqrt{2}$，$BO_1=2\sqrt{2}$，$BC=2$，由余弦定理，得 $\cos\angle BCO_1=\frac{BC^2+CO_1^2-BO_1^2}{2\times BC\times CO_1}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，故正确；选项C：因为 $\angle BOA=60°$，所以 BO 不与 AO 垂直，所以 BO 不与平面 AA_1D_1D 垂直，故不正确；选项D：取 C_1O_1 中点 H，连结 B_1H、FH，易证 $B_1H\perp$面 CC_1F_1F，所以 $\angle B_1FH$ 是 B_1F 与平面 CC_1F_1F 所成的角，在 $\mathrm{Rt}\triangle B_1HF$ 中，$B_1H=\sqrt{3}$，$FH=\sqrt{13}$，$B_1F=4$，所以 $\sin\angle B_1FH=\frac{B_1H}{B_1F}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，故正确．故选ABD．

12. ACD 【解析】选项A：直线 $l:y=ax-1$ 中，令 $x=0$，得 $y=-1$，与 a 无关，故正确；选项B：设 $M(x,y)$ 是曲线 C_1 上任意一点，M 关于直线 $y=x+1$ 的对称点为 $M'(x',y')$，则 $\begin{cases}x=y'-1\\y=x'+1\end{cases}$，所以 $x'+1=e^{y'-1+1}+1$，即 $x'=e^{y'}$，所以 $y'=\ln x'$，从而 $g(x)=\ln x$，故不正确；选项C：由 $g(x)=\ln x$，得 $g'(x)=\frac{1}{x}$，设切点为 (x_0,y_0)，则切线斜率 $a=\frac{1}{x_0}=\frac{\ln x_0+1}{x_0}$，所以 $x_0=1$，从而 $a=1$，故正确；选项D：直线 l 上有两个关于直线 $y=x+1$ 对称的点在曲线 C_1 上，等价于直线 l 与曲线 C_2 有两个不同的交点．方程 $ax-1=\ln x$，即 $a=\frac{\ln x+1}{x}$ 有两个解，设函数 $h(x)=\frac{\ln x+1}{x}$，$x>0$，$h'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}$，令 $h'(x)=0$，解得 $x=1$，所以函数 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增，在 $(1,+\infty)$ 单调递减，所以 $h(x)_{\max}=h(1)=1$，又当 $x\to+\infty$ 时，$h(x)\to0$，当 $x\to0$ 时，$h(x)\to-\infty$，所以 $a\in(0,1)$，故正确．故选ACD．

三、填空题

13. 1 120 【解析】因为 $\left(x-\frac{2}{x}\right)^8$ 的展开式的通项为 $T_{k+1}=C_8^k\cdot x^{8-k}\cdot\left(-\frac{2}{x}\right)^k=C_8^k\cdot(-2)^k\cdot x^{8-2k}$，令 $8-2k=0$，得 $k=4$，所以 $\left(x-\frac{2}{x}\right)^8$ 的展开式的常数项为 $T_5=C_8^4\cdot(-2)^4=1\ 120$．

14. $x+y-2=0$ 【解析】方法1：画图易得直线 AB 的方程为 $x+y-2=0$．方法2：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则由 $\begin{cases}x_1^2+y_1^2=4\\\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_1-2}{x_1-2}=-1\end{cases}$，可得 $x_1+y_1=2$，同理可得 $x_2+y_2=2$，所以直线 AB 的方程为 $x+y-2=0$．

15. $\frac{121}{2}$ 【解析】被3除余2且被5除余3的正整数按照从小到大的顺序排成一列，构成首项为8，公差为 $3\times5=15$ 的等差数列，所以 $a_n=8+15\times(n-1)=15n-7$，$S_n=8n+\frac{n(n-1)}{2}\times15=\frac{15}{2}n^2+\frac{1}{2}n$，从而 $\frac{S_n+120}{n}=\frac{15n}{2}+\frac{120}{n}+\frac{1}{2}\geqslant2\sqrt{\frac{15n}{2}\times\frac{120}{n}}+\frac{1}{2}=\frac{121}{2}$，当且仅当 $\frac{15n}{2}=\frac{120}{n}$ 即 $n=4$ 时，等号成立，所以 $\frac{S_n+120}{n}$ 的最小值为 $\frac{121}{2}$．

16. $x^2+y^2=4(x>0)$ 【解析】延长 F_2P，交 F_1M 于 Q，因为 $\angle PMF_2=\angle PMQ$，$\angle MPF_2=\angle MPQ$，$|MP|=|MP|$，所以$\triangle MPF_2\cong\triangle MPQ$，所以$|MF_2|=|MQ|$，所以$|QF_1|=|MF_1|-|MQ|=|MF_1|-|MF_2|$，因为 M 是双曲线 C 右支上一点，所以$|QF_1|=2a=4$，又因为 P 是 QF_2 的中点，O 是 F_1F_2 的中点，所以$|PO|=\frac{1}{2}|QF_1|=2$，所以 P 的轨迹是以 O 为圆心，半径为 2 的圆的一部分，所以点 P 的轨迹方程为 $x^2+y^2=4(x>0)$.

四、解答题

17. **解**：(1)因为 $S_{n+1}=4a_n+1,n\in\mathbf{N}^*$，所以 $S_n=4a_{n-1}+1,n\geqslant 2$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$，两式相减，得 $a_{n+1}=4a_n-4a_{n-1}$， (2分)

所以 $a_{n+1}+4a_{n-1}=4a_n$，所以$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}+\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}=2\times\frac{a_n}{2^n}$，即 $b_{n+1}+b_{n-1}=2b_n(n\geqslant 2$ 且 $n\in\mathbf{N}^*)$，所以数列$\{b_n\}$是等差数列. (5分)

(2)因为 $a_1=1,a_1+a_2=S_2=4a_1+1=5$，所以 $a_2=4$，由(1)知数列$\{b_n\}$是等差数列，公差为 $d=\frac{a_2}{2^2}-\frac{a_1}{2^1}=\frac{1}{2}$，所以 $b_n=\frac{1}{2}+(n-1)\times\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$， (8分)

所以 $a_n=\frac{n}{2}\times 2^n=n\times 2^{n-1},n\in\mathbf{N}^*$， (9分)

所以当 $n\geqslant 2$ 时，$S_n=4a_{n-1}+1=4\times(n-1)\times 2^{n-2}+1=(n-1)\times 2^n+1$，当 $n=1$ 时，等式也成立，所以 $S_n=(n-1)\times 2^n+1,n\in\mathbf{N}^*$. (10分)

18. **解**：(1)因为$\frac{\tan B+\tan C+\sqrt{3}}{\tan B\tan C}=\sqrt{3}$，所以 $\tan B+\tan C+\sqrt{3}=\sqrt{3}\tan B\tan C$，

所以 $\tan B+\tan C=\sqrt{3}(\tan B\tan C-1)$，从而$\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}=-\sqrt{3}$，

即 $\tan(B+C)=-\sqrt{3}$， (3分)

所以 $\tan A=\sqrt{3}$，因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. (4分)

(2)因为 $a=4,A=\frac{\pi}{3}$，由正弦定理，有$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$， (5分)

所以 $b=\frac{8\sqrt{3}}{3}\sin B,c=\frac{8\sqrt{3}}{3}\sin C=\frac{8\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)=\frac{8\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B\right)=4\cos B+\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin B$， (7分)

所以 $b+c=4\sqrt{3}\sin B+4\cos B=8\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$， (9分)

又因为$\triangle ABC$为锐角三角形，

所以$\begin{cases}0<B<\frac{\pi}{2}\\0<\frac{2\pi}{3}-B<\frac{\pi}{2}\end{cases}$，即$\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$，所以$\frac{\pi}{3}<B+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$， (10分)

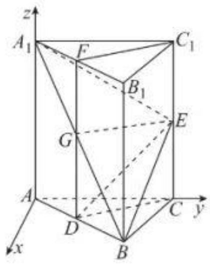
所以$\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$，从而 $b+c$ 的取值范围为 $(4\sqrt{3},8]$. (12分)

19. **解**：(1)在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$平面 ABC，因为 $CD\subset$平面 ABC，所以 $AA_1\perp CD$，因为$\triangle ABC$是等边三角形，D 是 AB 的中点，所以 $AB\perp CD$，因为 $AA_1\cap AB=A$，所以 $CD\perp$平面 AA_1B_1B，又因为 $CD\subset$平面 CDE，所以平面 $CDE\perp$平面 AA_1B_1B. (4分)

(2)取 A_1B_1 中点 F，连接 C_1F、DF，记 $DF\cap A_1B=G$，则 G 是 DF 中点，连接 GE，则平面 $CDFC_1\cap$平面 $A_1BE=GE$，因为 $CD\,/\!/$ 平面 A_1BE，$CD\subset$平面 $CDFC_1$，所以 $CD/\!/GE$，因为 G 是 DF 中点，所以

E是CC_1中点. (5分)

以A为原点建立如图所示的空间直角坐标系,



则$A(0,0,0)$,$B(\sqrt{3},1,0)$,$E(0,2,2)$,$A_1(0,0,4)$,所以$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,4)$,$\overrightarrow{A_1B}=(\sqrt{3},1,-4)$,$\overrightarrow{A_1E}=(0,2,-2)$, (7分)

设平面A_1BE的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0$,$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1E}=0$,所以$\begin{cases}\sqrt{3}x+y-4z=0\\2y-2z=0\end{cases}$,即

$\begin{cases}x=\sqrt{3}z\\y=z\end{cases}$,令$z=1$,得$\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,1)$. (9分)

因为$AA_1\perp$平面ABC,所以平面ABC的一个法向量为$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,4)$, (10分)

所以平面A_1BE与平面ABC所成的锐二面角θ的余弦值为$\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{AA_1}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AA_1}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{AA_1}|}$

$=\dfrac{|\sqrt{3}\times0+1\times0+1\times4|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2+1^2}\times\sqrt{0^2+0^2+4^2}}=\dfrac{4}{4\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

(12分)

20. **解**:(1)甲以3:1获胜,则前三局中甲胜两局败一局,第四局甲必须获胜, (1分)

所以$f(p)=C_3^2\cdot p^3\cdot(1-p)=3p^3-3p^4$,$0<p<1$,$f'(p)=9p^2-12p^3=3p^2(3-4p)$, (3分)

令$f'(p)=0$,得$p=\dfrac{3}{4}$;令$f'(p)>0$,得$0<p<\dfrac{3}{4}$;令$f'(p)<0$,得$\dfrac{3}{4}<p<1$.

所以$f(p)$在$\left(0,\dfrac{3}{4}\right)$上单调递增,在$\left(\dfrac{3}{4},1\right)$上单调递减,所以当$p=\dfrac{3}{4}$时,$f(p)$取得最大值为$\dfrac{81}{256}$.

(6分)

(2)由(1)知$p=p_0=\dfrac{3}{4}$,由题意,知X的所有可能取值为3、4、5,相应的概率为

$P(X=3)=\left(\dfrac{3}{4}\right)^3+\left(\dfrac{1}{4}\right)^3=\dfrac{27}{64}+\dfrac{1}{64}=\dfrac{7}{16}$,

$P(X=4)=C_3^2\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^3\times\dfrac{1}{4}+C_3^1\times\dfrac{3}{4}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^3=\dfrac{81}{256}+\dfrac{9}{256}=\dfrac{45}{128}$,

$P(X=5)=C_4^2\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^3\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+C_4^2\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^3=\dfrac{81}{512}+\dfrac{27}{512}=\dfrac{27}{128}$, (9分)

所以X的分布列为

X	3	4	5
P	$\dfrac{7}{16}$	$\dfrac{45}{128}$	$\dfrac{27}{128}$

(10分)

X的数学期望$E(X)=3\times\dfrac{7}{16}+4\times\dfrac{45}{128}+5\times\dfrac{27}{128}=\dfrac{483}{128}$. (12分)

21. **解**:(1)由题意,知$\dfrac{p}{2}=1$,所以$p=2$,所以抛物线C的方程为$y^2=4x$. (4分)

(2)因为直线l过抛物线C的焦点$F(1,0)$,由题意知,直线l斜率不为0,所以设l的方程为$x=my+1$,

设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,联立$\begin{cases}x=my+1\\y^2=4x\end{cases}$,消去$x$得$y^2=4my+4$,

即 $y^2-4my-4=0$，所以 $\Delta=16m^2+16>0$，$y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$，（7 分）

所以 $k_1+k_3=\frac{y_1-t}{x_1+1}+\frac{y_2-t}{x_2+1}$

$=\frac{(x_2+1)(y_1-t)+(x_1+1)(y_2-t)}{(x_1+1)(x_2+1)}$

$=\frac{x_2y_1+x_1y_2-t(x_1+x_2)+(y_1+y_2)-2t}{(x_1+1)(x_2+1)}$

$=\frac{2my_1y_2+(2-tm)(y_1+y_2)-4t}{m^2y_1y_2+2m(y_1+y_2)+4}$

$=\frac{-8m+(2-tm)\times4m-4t}{-4m^2+8m^2+4}$

$=\frac{-4tm^2-4t}{4m^2+4}=-t\times\frac{4m^2+4}{4m^2+4}=-t$，（10 分）

因为 $E(-1,t)$，$F(1,0)$，所以 $k_2=\frac{0-t}{1-(-1)}=-\frac{t}{2}$，（11 分）

所以 $k_1+k_3=2k_2$.（12 分）

22. **解**：(1) 当 $k=4$ 时，$f(x)=\ln x+\frac{4}{x+1}$，$x\in(0,+\infty)$，

所以 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-4x}{x(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}\geqslant0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又

因为 $f(1)=\ln1+\frac{4}{1+1}=2$，所以当 $0<x<1$ 时，$f(x)<2$，当 $x=1$ 时，$f(x)=2$，当 $x>1$ 时，$f(x)>2$.（5 分）

(2) 由 (1) 知，当 $x>1$ 时，$\ln x+\frac{4}{x+1}>2$，即 $\ln x>\frac{2(x-1)}{x+1}$，令 $x=1+\frac{1}{n}$，$n\in\mathbf{N}^*$，

则有 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{2}{2n+1}$，即 $\frac{2}{2n+1}<\ln\frac{n+1}{n}$，（8 分）

所以 $\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+\cdots+\frac{2}{2n+1}<\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}=\ln\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}\right)$

$=\ln(n+1)$，

即 $\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+\cdots+\frac{2}{2n+1}<\ln(n+1)$，$n\in\mathbf{N}^*$.（12 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。