2022学年第二学期杭州市高三年级教学质量检测

数学试题卷

考生须知:

1. 本试卷分试题卷和答题卷两部分．满分150分，考试时间120分钟．
2. 请用黑色字迹的钢笔或签字笔在答题卡指定的区域（黑色边框）内作答，超出答题区域的作答无效！
3. 考试结束，只需上交答题卡．

选择题部分（共60分）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，有一项是符合题目要求的．

1．设集合 $A=\{x\in\mathbf{N}^*|x^2\leqslant 4x\}$，$B=\{x|y=\sqrt{x-3}\}$，则 $A\cap\complement_{\mathbf{R}}B=$（　）

A．$[0，3]$　　B．$[1，3]$　　C．$\{1，2\}$　　D．$\{1，2，3\}$

2．设复数 z 满足 $z(1+\mathrm{i})=-2+\mathrm{i}$（i 是虚数单位），则 $|z|=$（　）

A．$\frac{\sqrt{10}}{2}$　　B．$\frac{5}{4}$　　C．$\frac{5}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{5}}{2}$

3．在数列$\{a_n\}$中，“数列$\{a_n\}$是等比数列”是“$a_2^2=a_1a_3$”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

4．设平面向量 $\boldsymbol{a}=(1，3)$，$|\boldsymbol{b}|=2$，且$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$，则$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=$（　）

A．1　　B．14　　C．$\sqrt{14}$　　D．$\sqrt{10}$

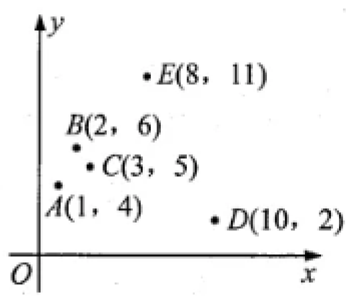
5．某兴趣小组研究光照时长 x（h）和向日葵种子发芽数量 y（颗）之间的关系，采集 5 组数据，作如图所示的散点图．若去掉 $D(10，2)$后，下列说法正确的是（　）

A．相关系数 r 变小

B．决定系数 R^2 变小

C．残差平方和变大

D．解释变量 x 与预报变量 y 的相关性变强



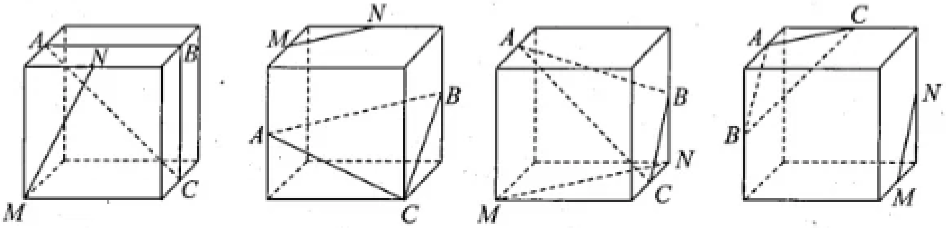
（第 5 题）

6．已知 $a>1$，$b>1$，且 $\log_2\sqrt{a}=\log_b 4$，则 ab 的最小值为（　）

A．4　　B．8

C．16　　D．32

7．如图，点 A，B，C，M，N 为正方体的顶点或所在棱的中点，则下列各图中，不满足直线 MN//平面 ABC 的是（　　）



A.　　　　B.　　　　C.　　　　D.

8．已知 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$（$\omega>0$）满足 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$，$f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=0$ 且 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{5\pi}{6}\right)$ 上单调，则 ω 的最大值为（　　）

A．$\frac{12}{7}$　　　B．$\frac{18}{17}$　　　C．$\frac{6}{17}$　　　D．$\frac{30}{17}$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．若直线 $y=kx+1$ 与圆 C：$(x-2)^2+y^2=9$ 相交于 A，B 两点，则 $|AB|$ 的长度可能等于（　　）

A．2　　　B．3　　　C．4　　　D．5

10．已知函数 $f(x)$（$x\in\mathbf{R}$）是奇函数，$f(x+2)=f(-x)$ 且 $f(1)=2$，$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，则（　　）

A．$f(2023)=2$　　　B．$f'(x)$ 的周期是 4

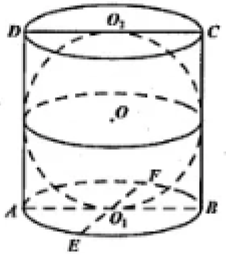
C．$f'(x)$ 是偶函数　　　D．$f'(1)=1$

11．一口袋中有除颜色外完全相同的 3 个红球和 2 个白球，从中无放回的随机取两次，每次取 1 个球，记事件 A_1：第一次取出的是红球；事件 A_2：第一次取出的是白球；事件 B：取出的两球同色；事件 C：取出的两球中至少有一个红球，则（　　）

A．事件 A_1，A_2 为互斥事件　　　B．事件 B，C 为独立事件

C．$P(B)=\frac{2}{5}$　　　D．$P(C|A_2)=\frac{3}{4}$

12．如图圆柱内有一个内切球，这个球的直径恰好与圆柱的高相等，O_1，O_2 为圆柱上下底面的圆心，O 为球心，EF 为底面圆 O_1 的一条直径，若球的半径 $r=2$，则（　　）



（第 12 题）

A．球与圆柱的体积之比为 2∶3

B．四面体 $CDEF$ 的体积的取值范围为 $(0,\ 32]$

C．平面 DEF 截得球的截面面积最小值为 $\frac{4\pi}{5}$

D．若 P 为球面和圆柱侧面的交线上一点，则 $PE+PF$ 的取值范围为 $[2+2\sqrt{5},\ 4\sqrt{3}]$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．在$\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$的展开式中，只有第 5 项的二项式系数最大，则展开式中含 x^2 项的系数为_____.

14．已知$\sin\theta+\cos\theta=2\sin\alpha$，$\sin\theta\cos\theta=\sin^2\beta$，则$4\cos^2 2\alpha-\cos^2 2\beta=$_____.

15．费马定理是几何光学中的一条重要原理，在数学中可以推导出圆锥曲线的一些光学性质.例如，点 P 为双曲线(F_1,F_2为焦点)上一点，点 P 处的切线平分$\angle F_1PF_2$.已知双曲线 C：$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$，$O$ 为坐标原点，l 是点 $P(3,\frac{\sqrt{10}}{2})$处的切线，过左焦点 F_1 作 l 的垂线，垂足为 M，则$|OM|=$______.

16．已知函数 $f(x)=e^{2x}-2e^x+2x$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$处的切线方程为 l：$y=g(x)$，若对任意 $x\in R$，都有$(x-x_0)(f(x)-g(x))\geqslant 0$ 成立，则 $x_0=$_____.

四、解答题

17．在$\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，$\cos B+\sin\frac{A+C}{2}=0$.

（1）求角B的大小；

（2）若 $a:c=3:5$，且 AC 边上的高为$\frac{15\sqrt{3}}{14}$，求$\triangle ABC$ 的周长.

18．设公差不为 0 的等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$S_5=20$，$a_3^2=a_2a_5$.

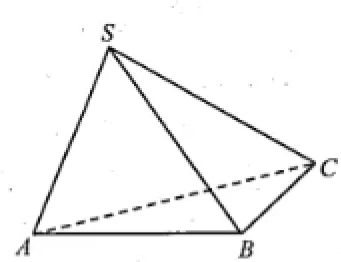
（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若数列$\{b_n\}$满足 $b_1=1$，$b_n+b_{n+1}=\left(\sqrt{2}\right)^{a_n}$，求数列$\{b_{2n}\}$的前 n 项和 S_n.

19．在三棱锥 S—ABC 中，底面$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，$\angle SAB=\angle SCB=\angle ABC=90°$.

（1）求证：$AC\perp SB$；

（2）若 $AB=2$，$SC=2\sqrt{2}$，求平面 SAC 与平面 SBC 夹角的余弦值.



（第 19 题）

20. 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，左，右顶点分别为 A，B，点 P，Q 为椭圆上异于 A，B 的两点，$\triangle PAB$ 面积的最大值为 2.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）设直线 AP，QB 的斜率分别为 k_1，k_2，且 $3k_1=5k_2$.

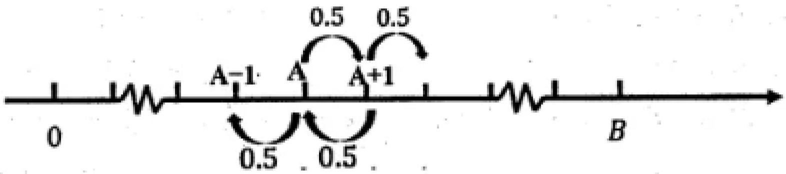
（i）求证：直线 PQ 经过定点.

（ii）设$\triangle PQB$ 和$\triangle PQA$ 的面积分别为 S_1，S_2，求$|S_1-S_2|$的最大值.

21. 马尔科夫链是概率统计中的一个重要模型，也是机器学习和人工智能的基石，在强化学习、自然语言处理、金融领域、天气预测等方面都有着极其广泛的应用．其数学定义为：假设我们的序列状态是…，X_{t-2}，X_{t-1}，X_t，X_{t+1}，…，那么 X_{t+1} 时刻的状态的条件概率仅依赖前一状态 X_t，即 $P(X_{t+1}\mid \dots,X_{t-2},X_{t-1},X_t)=P(X_{t+1}\mid X_t)$.

现实生活中也存在着许多马尔科夫链，例如著名的赌徒模型.

假如一名赌徒进入赌场参与一个赌博游戏，每一局赌徒赌赢的概率为 50%，且每局赌赢可以赢得 1 元，每一局赌徒赌输的概率为 50%，且赌输就要输掉 1 元．赌徒会一直玩下去，直到遇到如下两种情况才会结束赌博游戏：一种是手中赌金为 0 元，即赌徒输光；一种是赌金达到预期的 B 元，赌徒停止赌博．记赌徒的本金为 A（$A\in\mathbf{N}^*$，$A<B$），赌博过程如下图的数轴所示.



当赌徒手中有n元$(0\le n\le B, n\in\mathbf{N})$时，最终输光的概率为$P(n)$，请回答下列问题：

（1）请直接写出 $P(0)$与 $P(B)$的数值.

（2）证明$\{P(n)\}$是一个等差数列，并写出公差 d.

（3）当 $A=100$ 时，分别计算 $B=200$，$B=1000$ 时，$P(A)$的数值，并结合实际，解释当 $B\to\infty$时，$P(A)$的统计含义.

22. 已知函数 $f(x)=e^x-\frac{a}{x}$（$a\in\mathbf{R}$）.

（1）讨论函数 $f(x)$零点个数；

（2）若$|f(x)|>a\ln x-a$ 恒成立，求 a 的取值范围.